

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 25a

Elementaire avondcursus wiskunde 1952-1954.

Hoger Algebra.

H.J.A.Duparc.



1953

Elementaire avondcursus 1952 - 1953

Hogere Algebra

door

H.J.A. Duparc.

§1. Complexe getallen.

Wij onderstellen de opbouw van het reële getal bekend. Voor het rekenen met reële getallen gelden dan een aantal rekenregels, waarvoor wij verwijzen naar § 1 van de cursus Elementaire Analyse, met name naar de regels (1,1) tot en met (1,35).

Evenals de irrationale getallen werden ingevoerd om te bereiken, dat men zekere vergelijkingen (als b.v. $x^2 = 2$) die met rationale getallen niet oplosbaar waren, toch kan oplossen, zo geschiedt het invoeren der niet reële getallen met de bedoeling om b.v. de vergelijking $x^2 = -1$ oplosbaar te maken. Het is duidelijk dat deze niet op te lossen is met reële getallen, want kiest men in formule (1,21) van bovengenoemde cursus $a = 0$, $b = c$, dan vindt men $c^2 > 0$, dus $c^2 > 0$, dus $c^2 \neq -1$ voor ieder reëel getal c . De vergelijking $x^2 = -1$ bezit dus geen reële oplossingen. Men kan zelfs nog meer zeggen: Als wij het getalbegrip zover uitgebreid hebben, dat de vergelijking wel oplossingen bezit, kunnen deze onmogelijk voldoen aan de formule (1,21).

Om de vergelijking $x^2 = -1$ oplosbaar te maken, moeten wij dus nieuwe getallen invoeren, die wij niet-reële getallen noemen. De verzameling van alle reële en alle niet-reële getallen noemt men de verzameling der complexe getallen.

Op de axiomatische invoering der complexe getallen gaan wij hier niet nader in. Doet men dat wel, dan blijkt dat elk complex getal op één en slechts één wijze te schrijven is in de gedaante $a + ib$, waarbij a en b reële getallen zijn en i een nieuw symbool is. Men heeft dan $a + ib = c + id$ dan en slechts dan als $a = c$ en $b = d$ is. Uit de axiomatische opbouw blijkt dat som en product van twee complexe getallen als volgt gedefinieerd zijn:

$$(1) \quad \begin{cases} (a+ib) + (c+id) = a + c + i(b+d) \\ (a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc+ad). \end{cases}$$

Het laat zich dan bewijzen dat voor de complexe getallen de in de cursus Elementaire Analyse opgesomde rekenregels (1,1) tot en met (1,17) gelden, zodat ook de complexe getallen een lichaam vormen. Die complexe getallen

$a + ib$, waarvoor $b = 0$ is, noemen wij reëel en degene waarvoor $b \neq 0$ is, zijn dus niet reëel.

Opg. 1. Bewijs $(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$.

Opg. 2. Bereken $(2+i)^2$; $(4-3i)(4+3i)$.

Bekijkt men de formules (1) nader, dan ziet men tevens dat met de complexe getallen geheel gerekend kan worden alsof het reële getallen zijn en dat dit ook met het symbool i het geval is, mits men voor i^2 de waarde -1 invoere.

Dat deling uitvoerbaar is, blijkt het eenvoudigste daaruit, dat men het reciproke van een complex getal (behalve van het getal 0) weer als complex getal kan schrijven, immers

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Delen door een complex getal kan dus geschieden door vermenigvuldigen met het reciproke van dat complexe getal (of door rechtstreeks bovengenoemd procédé toe te passen).

Opg. 3. Als n een geheel getal voorstelt, bereken dan i^n .

Opg. 4. Bereken $(1+i)^n$ voor gehele n .

Opg. 5. Bepaal het complexe getal $z = x + iy$ zodat $z^2 = i$.

Een complex getal $z = x + iy$ heet zuiver imaginair als $x = 0$. Twee complexe getallen $z = x + iy$ en $w = u + iv$ heten toegevoegd complex als $x = u$, $y = -v$.

Opg. 6. Zowel de som als het product van twee toegevoegd complexe getallen is reëel. Wat is te zeggen over hun verschil?

Opg. 7. Bewijs $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$.

Opg. 8. Leid een soortgelijk resultaat af voor $\frac{\cos a + i \sin a}{\cos b + i \sin b}$.

Opg. 9. Bewijs voor elk natuurlijk getal n de formule $(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$ (theorema van de Moivre).

Opg. 10. Bewijs de formule van opg. 9 voor elk geheel getal n .

Wij geven thans een meetkundige voorstelling van de complexe getallen.

Reeds door Gauss is opgemerkt, dat elk complex getal $a + ib$ correspondeert met een punt in het platte vlak, dat de coördinaten a en b bezit ten opzichte van een gegeven rechthoekig assenstelsel.

Zij gegeven een x -as en een daarop loodrecht staande y -as. De reële getallen corresponderen met de punten van de x -as; de zuiver imaginaire getallen met de punten van de y -as. Deze assen heten daarom de reële en de imaginaire as. De getallen waarvan het reële deel positief is, corresponderen met de punten rechts van de imaginaire as enz.

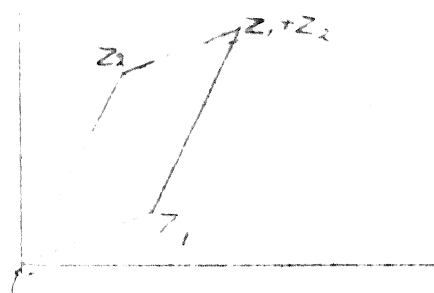
Het punt met de coördinaten (a, b) noemen we kortweg het complexe getal $a + ib$ en omgekeerd noemen wij het complexe getal $a + ib$ kortweg

het punt met de coördinaten (a,b) . Het vlak gevormd door de punten met coördinaten (a,b) heet dan het complexe vlak.

Volgens deze afspraak zijn dus de complexe getallen punten van het complexe vlak, en wel punten voor welke een bepaalde optelling en een bepaalde vermenigvuldiging gedefinieerd is.

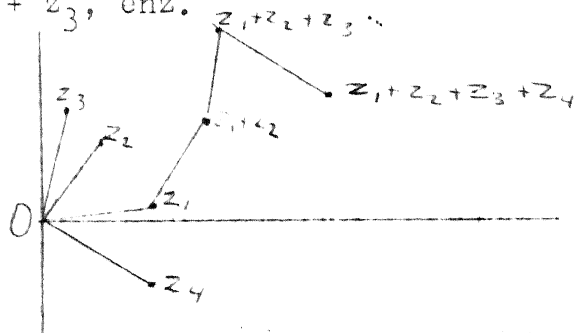
Hoe construeren we nu de som van twee punten z_1 en z_2 gelegen in het complexe vlak?

Noemen we z_1 en z_2 respectievelijk $a+ib$ en $c+id$, dan is $z_1 + z_2$ per definitie het punt met de coördinaten $a + c$ en $b + d$.



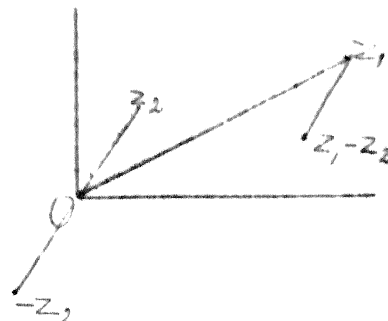
Wij vinden dus $z_1 + z_2$ als hoekpunt van een parallellogram, waarvan z_1 en z_2 twee overstaande hoekpunten zijn en de oorsprong het 4e hoekpunt is. Bij deze constructie is het niet nodig het volledige parallellogram te tekenen. Het is voldoende vanuit z_1 een lijnstuk te tekenen, dat gelijk aan en evenwijdig is met het lijnstuk, dat de oorsprong met z_2 verbindt.

Deze laatste opmerking stelt ons in staat om op gemakkelijke wijze de som te construeren van n punten $z_1, z_2, \dots, z_n$ gelegen in het z -vlak. Men tekent eerst vanuit z_1 het lijnstuk, dat gelijk en evenwijdig is met het lijnstuk, dat de oorsprong met z_2 verbindt; aldus vindt men $z_1 + z_2$. Vanuit dit punt tekent men het lijnstuk, dat gelijk is aan en evenwijdig is met het lijnstuk, dat de oorsprong met z_3 verbindt; aldus vindt men $z_1 + z_2 + z_3$, enz.



Hoe construeren we het verschil $z_1 - z_2$ van twee in het complexe vlak gelegen punten? Verminderen met z_2 komt, zoals we gezien hebben, op hetzelfde neer als vermeerderen met het tegengestelde. Dat wil zeggen tekent men vanuit z_1 het lijnstuk, dat gelijk is aan en evenwijdig is met het lijnstuk, dat z_2 met de oorsprong verbindt, dan krijgt men $z_1 - z_2$.
Opg. 11. Bewijs meetkundig $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Onder de modulus $|z|$ van een complex getal z verstaan we de afstand van dat punt tot de oorsprong, dus $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De modulus heet ook wel de volstreekte waarde.



Opg. 12. De modulus van een product van twee factoren is gelijk aan het product der moduli der factoren.

Opg. 13. De modulus van een product van een willekeurig aantal factoren is gelijk aan het product der moduli der factoren.

Opg. 14. De modulus van een som van 2 termen is hoogstens gelijk aan de som der moduli der termen.

Wij gaan deze eigenschap ook nog algebraïsch bewijzen. Te bewijzen valt

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid is ≥ 0 , zodat het voldoende is aan te tonen, dat het kwadraat van het linkerlid hoogstens gelijk is aan het kwadraat van het rechterlid. Dus te bewijzen

$$ac + bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid is weer ≥ 0 , zodat het voldoende is aan te tonen, dat het kwadraat van het linkerlid hoogstens gelijk is aan het kwadraat van het rechterlid, dus te bewijzen

$$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2,$$

hetgeen evident is.

Opg. 15. De modulus van een som van twee termen is minstens gelijk aan het verschil van de moduli der termen.

Opg. 16. De modulus van de som van een eindig aantal termen is hoogstens gelijk aan de som der moduli der termen.

Opg. 17. De modulus van het verschil van 2 complexe getallen is de afstand van de complexe getallen.

Opg. 18. De modulus van een verschil van twee complexe getallen is hoogstens gelijk aan de som en minstens gelijk aan het verschil der moduli dier getallen.

Beschouw nu een willekeurig complex getal $z \neq 0$, zodat z een punt in het complexe vlak is, dat niet met de oorsprong samenvalt. De voerstraal, die de oorsprong met z verbindt, heeft dan een lengte gelijk aan $|z|$. Deze lengte noemen we r . De voerstraal maakt met de positieve reële as een hoek φ , die op een veelvoud van 360° dus op een veelvoud van 2π radialen na, ondubbelzinnig bepaald is. Deze hoek φ heet het argument van z en wordt met $\arg z$ aangeduid. Dus elk punt z , dat niet met de oorsprong samenvalt, bezit een argument, dat op een veelvoud van 2π na, on-

dubbelzinnig is vastgelegd. Het punt z zelf kan dan worden geschreven in de gedaante $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Stelling: Het product van twee factoren, die beide ongelijk nul zijn, heeft een argument, dat, op een veelvoud van 2π na, gelijk is aan de som van de argumenten der factoren. Want zijn

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ en } r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

de twee factoren, dan is volgens het theorema van de Moivre het product gelijk aan

$$r_1 r_2 \{ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \}.$$

Hieruit blijkt niet alleen, zoals we reeds wisten, dat de modulus van het product gelijk is aan het product der moduli van de factoren, doch tevens dat het argument van het product, op een veelvoud van 2π na, gelijk is aan de som der argumenten.

Bovenstaande beschouwingen stellen ons in staat om op eenvoudige wijze het product van twee complexe getallen z_1 en z_2 te construeren. Is minstens een van deze twee complexe getallen nul, dan valt het product met de oorsprong samen. Zijn beide factoren z_1 en z_2 ongelijk aan nul, dan zijn van het product $z_1 z_2$ de modulus bekend en ook, op een veelvoud van 2π na, het argument. De modulus r van het product is gelijk aan het product $r_1 r_2$ der moduli, dus $1 : r_1 = r_2 : r$, zodat r geconstrueerd wordt als 4e evenredige. De constructie komt daarop neer, dat men een driehoek construeert, die gelijkvormig is met de driehoek met de hoekpunten O , 1 en z en die O en z tot hoekpunt heeft.

Opg. 19. Bewijs meetkundig $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Opg. 20. Vermenigvuldiging met i betekent een

draaiing om de oorsprong over een rechte hoek.

Opg. 21. Bij het midden van het lijnstuk, dat de complexe getallen a en b verbindt, behoort het complexe getal $\frac{1}{2}(a+b)$.

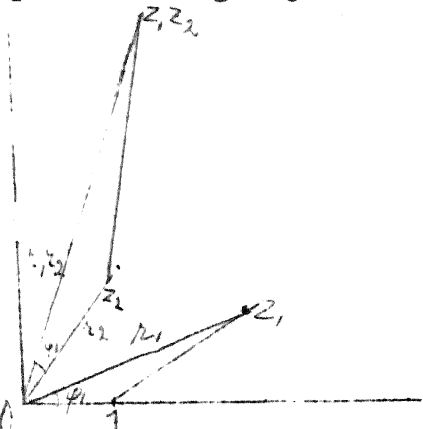
Opg. 22. De cirkel met middelpunt m en straal r heeft tot vergelijking

$$|z - m| = r.$$

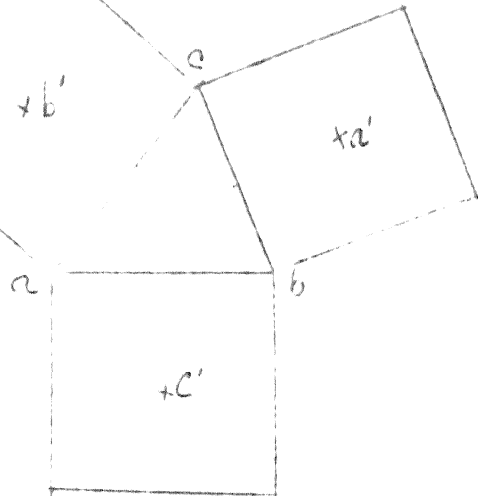
Met behulp van de theorie der complexe getallen kunnen nu eenvoudige bewijzen worden gegeven van sommige stellingen uit de vlakke meetkunde.

Als voorbeeld geven wij de volgende eigenschap. Als men op de zijden van een driehoek ABC buitenwaarts vierkanten beschrijft, dan is de verbindingslijn van de middelpunten van twee dier vierkanten even lang en loodrecht op die van het middelpunt van het derde vierkant en een der hoekpunten van de driehoek.

Voor het bewijs geven wij de driehoek ABC door de complexe getallen a, b en c , die met de hoekpunten corresponderen.



Met het midden van bc correspondeert dan het complexe getal $\frac{1}{2}(b+c)$ en met het middelpunt van het vierkant op de zijde bc het getal $a' = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}i(b-c)$. Evenzo blijken bij de middens der andere vierkanten de getallen $b' = \frac{1}{2}(c+a) + \frac{1}{2}i(c-a)$ en $c' = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}i(a-b)$ te behoren. Uit $a' - b' = i(c'-c)$ volgt dan de bewering.



Opg. 23. De meetkundige plaats der punten wier afstanden tot 2 gegeven punten een gegeven verhouding hebben, is een cirkel.

§ 3. Binomium van Newton.

Voor de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen gelden dezelfde rekenregels als voor de overeenkomstige bewerkingen bij bestaande getallen. Zo vinden we, als a en b willekeurige complexe getallen voorstellen

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 a+b &= a+b \\
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
 \end{aligned}$$

enz. De hierbij optredende getallenfactoren vormen een driehoekig schema, genaamd de driehoek van Pascal, nl.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & 1 & 7 & 21 & 35 & 21 & 7 & 1
 \end{array}$$

In iedere rij is zowel het eerste als het laatste getal gelijk aan 1. Elk der overige getallen is, volgens definitie, gelijk aan de som van de twee onmiddellijk daarbovenstaande getallen.

Een uitdrukking van de gedaante $a+b$ noemt men een binomium (twee-term). De getallen voorkomende in de driehoek van Pascal heten daarom binomiaalcoëfficiënten en worden in de regel met $\binom{n}{h}$ aangeduid, en wel zo, dat de driehoek van Pascal ook geschreven kan worden in de gedaante

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

De binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{h}$ zijn dus gedefinieerd voor elk paar gehele getallen n en h met $n \geq h \geq 0$. Daarbij is

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1;$$

terwijl $\binom{n}{h}$ voor $0 < h < n$ per definitie gelijk is aan

$$\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h}.$$

Wij bewijzen thans, dat het getal $\binom{n}{h}$ gelijk is aan $\frac{n!}{h!(n-h)!}$. Hierbij wordt onder $n!$ verstaan het product der getallen $1, 2, \dots, n-1$ en n . Dus $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$;

Onder $0!$ is men gewoon te verstaan het getal 1. Men heeft $n! = n(n-1)!$

Om de formule $\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!}$ te bewijzen, passen we volledige inductie toe ten aanzien van n . Voor $n = 0$ is de enige binomiaalcoëfficiënt, die wij behoeven te beschouwen $\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}$, zodat de formule voor $n=0$ juist is.

Voor $n > 0$ en $h = 0$ is de formule eveneens juist, want men heeft $\binom{n}{0} = 1$ en $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$. Ook voor $n > 0$ en $h = n$ is de formule juist (bewijs dit!).

Wij onderstellen thans dat de formule voor $n-1$ in plaats van n is bewezen en mogen daarbij aannemen dat het natuurlijke getal h voldoet aan $0 < h < n$.

Derhalve kunnen we formule (1) toepassen en vinden

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{h} &= \binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} = \frac{(n-1)!}{(h-1)!(n-h)!} + \frac{(n-1)!}{h!(n-h-1)!} = \\
 &= \frac{(n-1)!(h-n+h)}{h!(n-h)!} = \frac{n!}{h!(n-h)!},
 \end{aligned}$$

waarmee de gezochte formule bewezen is.

Aangezien op grond van hun ontstaanswijze alle binomiaalcoëfficiënten natuurlijke getallen zijn, is $\frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{h!}$ geheel, dus $h!$ is deelbaar op het product van h willekeurige op elkaar volgende getallen.

Opg. 1. Bewijs $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$.

Wij hebben thans gevonden voor ieder natuurlijk getal n

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n-h} = \sum_{h=0}^n \frac{n! a^h b^{n-h}}{h!(n-h)!}.$$

Wij kunnen deze formule ook schrijven in de gedaante

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{h,k=0 \\ h+k=n}}^n \frac{n!}{h!k!} a^h b^k.$$

Opg. 2. Bewijs dat voor willekeurige gehele a en b de uitdrukking $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ deelbaar is door 7.

Met behulp van de gevonden formule is het ook mogelijk om een ontwikkeling van $(a+b+c)^n$ neer te schrijven. Immers

$$\begin{aligned} (a+b+c)^n &= \{a+(b+c)\}^n = \\ &= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} a^h (b+c)^{n-h} = \\ &= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} a^h \sum_{k=0}^{n-h} \frac{(n-h)!}{k!(n-h-k)!} b^k c^{n-h-k} = \\ &= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!} a^h \sum_{k=0}^{n-h} \frac{1}{k!(n-h-k)!} b^k c^{n-h-k} = \\ &= \sum_{\substack{h,k,m=0 \\ h+k+m=n}}^n \frac{n!}{h!k!m!} a^h b^k c^m. \end{aligned}$$

De bedoeling is hierbij, dat de niet negatieve gehele getallen h, k en m alle gehele waarden van 0 tot en met n doorlopen, zodanig, dat hun som gelijk is aan n .

Voorbeeld.

$$(a+b+c)^3 = \sum_{\substack{h,k,m=0 \\ h+k+m=3}}^3 \frac{3!}{h!k!m!} a^h b^k c^m.$$

Hierbij zijn voor (h,k,m) slechts mogelijk $(0,0,3)$, $(0,3,0)$, $(3,0,0)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(1,1,1)$. Elk der 10 gevonden stellen levert een term in het rechterlid. De coëfficiënt van b.v. de term abc is daarbij

$$\frac{3!}{1!1!1!} = 6.$$

Wij merken nog op, dat de termen met $(h,k,m) = (0,0,3)$, $(0,3,0)$ en $(3,0,0)$ analoog gebouwd zijn. Zij luiden c^3 , b^3 en a^3 . Zo zijn de volgende termen ook analoge termen. Men schrijft vaak kortweg

$$(a+b+c)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b + 6 abc,$$

waarbij met $\sum a^3$ de som $a^3 + b^3 + c^3$ en met $\sum a^2 b$ de som $a^2 b + ab^2 + a^2 c + ac^2 + b^2 c + bc^2$ bedoeld wordt.

Opmerking. Op analoge wijze vindt men formules voor machten van veeltermen bestaande uit vier of meer termen. In het algemeen, een resultaat dat door volledige inductie te bewijzen is, komt men tot de formule

$$\left(\sum_{p=1}^P a_p\right)^n = \sum_{\substack{h_1, h_2, \dots, h_P=n \\ h_1+h_2+\dots+h_P=n}}^n \frac{n!}{h_1!h_2!\dots!h_P!} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_P^{h_P}.$$

Opg. 3. Bepaal de coëfficiënt van x^{11} in de ontwikkeling van $(1+x+x^2)^3$.

Opg. 4. Bewijs $\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} = 2^n$. Bereken $\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h$.

Wij geven nog enige toepassingen.

Uit $(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ volgt met behulp van de gevonden binomiaal-formule

$$\sum_{h=0}^a \binom{a}{h} x^h \cdot \sum_{k=0}^b \binom{b}{k} x^k = \sum_{n=0}^{a+b} \binom{a+b}{n} x^n.$$

Wij bepalen nu de coëfficiënt van x^n in het linkerlid, die op grond van de zojuist gegeven relatie gelijk moet zijn aan $\binom{a+b}{n}$. De gezochte coëfficiënt is kennelijk van de gedaante

$$\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=n}} \binom{a}{h} \binom{b}{k} = \sum_{h=0}^n \binom{a}{h} \binom{b}{n-h},$$

zodat wij vinden

$$\sum_{h=0}^n \binom{a}{h} \binom{b}{n-h} = \binom{a+b}{n}.$$

Opg. 5. Bewijs

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Opg. 6. Door uit te gaan van de formule

$$(1-x)^a(1+x)^a = (1-x^2)^a$$

bewijze men

$$\sum_{\substack{h,k \geq 0 \\ h+k=2n}} (-1)^h \binom{a}{h} \binom{a}{k} = (-1)^n \binom{a}{n}$$

en lei de daaruit af

$$\sum_{h=0}^{2n} (-1)^h \binom{2n}{h}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Opg. 7. Bewijs

$$\sum_{h=0}^{2n+1} (-1)^h \binom{2n+1}{h}^2 = 0.$$

Opg. 8. Bewijs door middel van volledige inductie voor $n \geq 4$ de formule $2^n < n! < n^n$.

Opg. 9. Bewijs door middel van volledige inductie

$$\sum_{h=a}^{n-1} \binom{h}{a} = \binom{n}{a+1}.$$

Opg. 10. Bewijs $\sum_{h=1}^n h \binom{n}{h} = n \cdot 2^{n-1}$.

Opg. 11. Bewijs $\sum_{h=k}^n \binom{h}{k} \binom{n}{h} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$.

Opg. 12. Bepaal het aantal factoren 2 en het aantal factoren 3, die :
 1. het getal $\binom{100}{50}$ bevat zijn en bewijs dat dat getal niet deelbaar is
 2. en ook niet door 7.

Opg. 13. Laat zien dat als p een priemgetal is, het getal $\binom{p}{h}$ deelbaar is door p indien $1 \leq h \leq p-1$.

Het gevondene in opgave 13 levert ons dat in de ontwikkeling

$$(1+x)^p = \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} x^h$$

voor gehele x alle termen in het rechte lid deelbaar zijn door p , afgezien van de eerste en de laatste, dus de uitdrukking

$$(1+x)^p - x^p - 1$$

is, als p priem is en x geheel is, deelbaar door p .

Wij leiden hieruit de volgende stelling af: Voor gehele n en voor priemgetallen p is $n^p - n$ deelbaar door p .

Wij geven een bewijs door volledige inductie. Voor $n=1$ is de bewering zeker juist. Zij nu de bewering juist voor zekere n . Dan is dus $n^p - n$ deelbaar door p . Zoëven vonden wij dat ook $(1+n)^p - n^p - 1$ deelbaar is door p ; dan is dat ook het geval met de som $(1+n)^p - n - 1$ der laatstgenoemde uitdrukkingen, waaruit de bewering voor $n+1$ volgt, zodat hiermede de stelling algemeen bewezen is.

Gevolg: Als het priemgetal p niet deelbaar is op n , dan is p deelbaar op $n^{p-1} - 1$ (stelling van Fermat). Immers volgens de vorige stelling is p deelbaar op $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ en omdat het priemgetal p niet deelbaar is op n , is het deelbaar op $n^{p-1} - 1$.

Opg. 14. Bewijs met behulp van het theorema van de Moivre

$$\cos na = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \sin^{2h} a \cos^{n-2h} a;$$

$$\sin na = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \sin^{2h+1} a \cos^{n-2h-1} a.$$

Hierbij verstaat men onder het symbool $[m]$ het grootste natuurlijke getal dat $\leq m$ is.

§ 3. Permutaties en combinaties.

Onder een permutatie van een aantal elementen $a_1, \dots, a_n$ wordt verstaan de in een of andere volgorde genomen verzameling dezer elementen.

Zij bezitten de elementen a_1, a_2 de volgende twee permutaties: $a_1 a_2$ en $a_2 a_1$. Het valt niet moeilijk na te gaan hoeveel permutaties een verzameling van n elementen bezit, welk aantal wij met P^n zullen aangeven. Gaan wij de n elementen rangschikken, dan kan op de eerste plaats elk der n elementen staan en is eenmaal een keuze voor het element op de eerste plaats gedaan, dan kunnen de overige $n-1$ elementen nog over alle vorige $n-1$ plaatsen worden gepermuteerd. Bijgevolg is $P^n = nP^{n-1}$, waaruit wegens $P^1 = 1$ onmiddellijk volgt $P^n = n!$ Voor $n=2$ hadden wij dit resultaat hierboven al gevonden.

Op allerlei plaatsen in de wiskunde, de kansrekening en de statistiek en ook in de praktijk speelt het begrip permutatie een belangrijke rol. Dit geldt trouwens ook voor de hierna te bespreken begrippen combinatie en variatie.

Wij geven enkele voorbeelden. Zij gevraagd de som van alle getallen van 5 cijfers, waarin elk der cijfers 1,3,5,7 en 9 precies één keer voorkomt. Onder deze getallen zijn er P^4 stuks waarbij het cijfer 1 op de voorste plaats staat, even zovele waarbij dit cijfer op de volgende plaats staat, enz. dus de bijdrage van het cijfer 1 in de som der getallen is $P^4 \times 11111 = 24 \times 11111$. Op analoge wijze vindt men voor de bijdrage van het cijfer 3 in de gezochte som de waarde $P^4 \times 33333$ enz. De waarde der gezochte som is dus

$$24 \times 11111 \times (1+3+5+7+9) = 6666600.$$

Opg. 1. Een gezelschap van 9 volwassen personen spreekt af iedere dag te dineren aan een ronde tafel en daarbij steeds weer op een andere wijze (dat is op een wijze waarbij niet ieder dezelfde twee burens heeft als bij een vorige maaltijd) aan te zitten. Hoe oud is de jongste van het gezelschap op de dag van de laatst mogelijke maaltijd ten minste?

Thans bespreken wij het begrip variatie. Een variatie van k uit n elementen is een keuze van k elementen uit de groep van n elementen. Het aantal mogelijke dergelijke variaties geeft men aan met V_k^n . Wij leiden een formule af voor V_k^n .

Voor het eerste element der variatie van k uit de n elementen zijn n mogelijkheden, terwijl bij een eenmaal gedane keuze van de overige $k-1$ elementen nog alle variaties van $k-1$ uit $n-1$ elementen kunnen worden genomen. Bijgevolg is

$$V_k^n = n V_{k-1}^{n-1},$$

waaruit wegens $V_1^n = n$ door volledige inductie volgt

$$V_k^n = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Voor $k=n$ vinden wij het vorige resultaat $P^n = V_n^n = n!$ terug.

Opg. 2. Hoeveel getallen van 4 ongelijke cijfers zijn er? Bepaal ook hun som.

Opg. 3. Hoeveel getallen onder de 10.000 bestaan er waarin geen zelfde cijfer tweemaal of vaker optreedt.

Onder een combinatie van k uit n elementen verstaat men een groep van k elementen genomen uit de n elementen waarbij het van geen belang is in welke volgorde die k elementen genomen worden. Het aantal combinaties van k uit n elementen geeft men aan met C_k^n . Wenst men wel op de volgorde te letten, dan dient men nog achteraf alle permutaties van iedere combinatie van k te beschouwen (welk aantal $P^k = k!$ is), waarna men weer alle variaties vindt. Bijgevolg is

$$p^k C_k^n = V_k^n, \text{ dus } k! C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!},$$

dus

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Wij vinden hier in de vorige § behandelde binomiaalcoëfficiënten terug en kunnen dus het toen gevonden resultaat ook op de volgende wijze schrijven

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k.$$

Het is mogelijk om dit resultaat rechtstreeks af te leiden. Immers als men de coëfficiënten van x^k in de uitdrukking

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x) \dots (1+x)$$

wenst te weten, merkt men op dat iedere keuze van k factoren uit de n factoren $1+x$ juist aanleiding geeft tot één term x^k , zodat de coëfficiënt van x^k in $(1+x)^n$ gelijk moet zijn aan het aantal C_k^n der combinaties van k uit n elementen.

Opg. 4. Hoeveel diagonalen bezit een vlakke n -hoek? In hoeveel punten (de hoekpunten van de veelhoek niet meegerekend) snijden deze elkaar?

Opg. 5. Hoeveel verschillende bridgespelen zijn er?

Thans onderzoeken wij het aantal $\overline{V}_k^n$ van herhalingsvariaties van k uit n elementen. Dit zijn variaties waarbij op iedere plaats een der elementen mag staan, ongeacht of dit element al op een andere plaats gekozen is. Kiest men een eerste element uit (waarvoor n keuzen zijn) dan heeft men als het eerste element is vastgelegd nog slechts de herhalingscombinaties van $k-1$ uit n elementen te bepalen. Bijgevolg is $\overline{V}_k^n = n\overline{V}_{k-1}^n$, dus wegens $\overline{V}_1^n = n$ krijgt men $\overline{V}_k^n = n^k$.

Evenals men kan spreken van herhalingsvariaties kan men spreken van herhalingscombinaties van k uit n , dat zijn combinaties van k uit n elementen, waarbij meer dan eenmaal eenzelfde element uit de verzameling der n elementen mag worden gekozen. Het aantal dergelijke herhalingscombinaties geven wij aan met $\overline{C}_k^n$. Ook dit aantal laat zich op eenvoudige wijze bepalen.

Beschouw n elementen $a_1, \dots, a_n$. Om het aantal $\overline{C}_k^n$ te bepalen, voegen wij nog $k-1$ nieuwe elementen hieraan toe en bepalen alle combinaties van k uit de $n+k-1$ elementen $a_1, \dots, a_{n+k-1}$. Dit aantal is, zoals wij zagen gelijk aan $\binom{n+k-1}{k}$. Nu merken wij op, dat met iedere combinatie $a_{n_1} \dots a_{n_k}$ (waarbij men mag onderstellen $n_1 < n_2 < \dots < n_k$) van k elementen uit de $n+k-1$ beschouwde elementen men één en slechts één herhalingscombinatie van k uit n kan verkrijgen door daarvoor te nemen $a_{n_1} a_{n_2-1} \dots a_{n_k-k+1}$, welke wegens $n_h \geq h$ dus $n_h - (h-1) \geq 1$ inderdaad een toelaatbare herhalingscombinatie van k is uit de n elementen $a_1, \dots, a_n$. Omgekeerd volgt uit iedere herhalingscombinatie $a_{n_1} \dots a_{n_k}$ van de n elementen (waarbij men mag onderstellen $n_1 < n_2 < \dots < n_k$) juist één gewone

combinatie $a_{n_1} a_{n_2+1} a_{n_3+1} \dots a_{n_k+k-1}$ der $n+k-1$ elementen $a_1 \dots a_{n+k-1}$, want men heeft $n_h+h-1 \leq n+k-1$ en voor $h < i$ is $n_h+h-1 \neq n_2+i-1$, want anders was $n_h-n_i = i-h$ in strijd met $n_h < n_{h+1} < \dots < n_i$. Bijgevolg is

$$\overline{C}_k^n = C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Opg. 6. Hoeveel dominostenen bevat een dominospel?

Als toepassing van het vooraangaande bepalen wij het aantal termen van een n^e graadsvorm in k variabelen, waarbij wij twee termen verschillend rekenen als niet alle variabelen erin in dezelfde graad voorkomen. Kennelijk is dit aantal gelijk aan $\overline{C}_n^k$, en is dus gelijk aan $\binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$.

Wenst men het aantal permutaties te berekenen van k uit n elementen, waaronder echter i_1 gelijke, verder i_2 gelijke maar verschillend van de vorige i_1 elementen, i_3 gelijke, maar verschillend van de vorige i_1+i_2 elementen,, i_t gelijke maar verschillend van de vorige $i_1+\dots+i_{t-1}$ elementen, voorkomen, dan is dit aantal uit het aantal P^n te vinden door allereerst alle permutaties van de eerste i_1 gelijke elementen als dezelfde te beschouwen, hetzelfde te doen met de permutaties van de i_2 verdere gelijke enz., zodat men dan voor het gezochte aantal vindt

$$\frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_t!}.$$

Toepassing. Zij gevraagd hoeveel verschillende getallen men kan vormen met dezelfde cijfers als het getal 122333. Men vindt $i_1=2$, $i_2=3$, $n=6$, dus het aantal luidt

$$\frac{6!}{3!2!} = 60.$$

Opg. 7. Bepaal de somdezer getallen.

Wij laten nu nu zien hoe men het aantal combinaties bepaalt van k uit n elementen, wanneer onder die elementen i gelijke optreden. Allereerst krijgt men alle combinaties van k uit de $n-i$ ongelijke elementen; verder de combinaties van $k-1$ uit de $n-i$ ongelijke, waarbij verder 1 element der i gelijke optreedt; vervolgens de combinaties van $k-2$ uit de $n-i$ ongelijke waarbij verder 2 elementen der i gelijke optreden enz. Het totale aantal is dus gelijk aan

$$C_k^{n-i} + C_{k-1}^{n-i} + \dots + C_{k-i}^{n-i} = \sum_{h=k-i}^k C_h^{n-i};$$

is echter $k < i$ dan loopt de sommatie van $h=0$ af. Indien echter $k < n-i$ is, treedt er geen combinatie op waarbij alle i gelijke elementen ontbreken, zodat men dan voor het aantal gezochte combinaties vindt

$$C_{n-i}^{n-i} + C_{n-i-1}^{n-i} + \dots + C_{k-1}^{n-i} = \sum_{h=k-1}^{n-i} C_h^{n-i}.$$

In het algemeen krijgt men dus voor het gezochte aantal

$$\sum_{h=\max(0, k-i)}^{\min(n-i, k)} c_h^{n-i}.$$

Opg. 8. Op hoeveel wijzen kan men het getal 20 als som van 5 gehele getallen schrijven, die elk ≥ 3 zijn?

Opg. 9. Als men uit een spel van 52 kaarten er 13 trekt, hoe groot is dan de kans, dat er 4 azen onder zitten?

Opg. 10. Wat is de kans om met twee dobbelstenen in 3 worpen precies tweemaal een 6 te gooien? Bepaal ook de kans, dat men ten minste tweemaal een 6 gooit.

Opg. 11. In een warenhuis staat een aantal blikken opgestapeld in een pyramide, d.w.z. in het grondvlak vormen de blikjes een opgevalde gelijkzijdige driehoek, waarvan in de omtrek 60 blikken staan. In de eerste laag hierboven staan de blikken juist boven de zwaartepunten van steeds 3 naburige blikken uit het grondvlak, op analoge wijze is iedere laag gezet boven de voorafgaande. Gevraagd wordt hoeveel blikken de pyramide bevat.

Opg. 12. Wat is de kans dat men bij het nemen van twee dominostenen in totaal 12 ogen krijgt?

Opg. 13. Hoeveel verschillende getallen zijn te schrijven, die uit de cijfers 0011122 bestaan?

Opg. 14. Op hoeveel verschillende manieren kan men een bedrag van 10 cent met vooroorlogse munten betalen. En op hoeveel manieren met de huidige munten (waarbij op het soort cent, stuiver enz, niet wordt gelet)?

Opg. 15. Men vormt de som van alle termen $x^m y^n z^p u^q$, waarbij de getallen m, n en p een permutatie vormen van de getallen 2, 2, 3 en 4. Uit hoeveel termen bestaat die som? Bewijs dat die som gelijk is aan $x^2 y^2 z^2 u^2 (s_1 s_2 - s_3)$, waarbij

$$s_n = x^n + y^n + z^n + u^n \quad (n = 1, 2, 3).$$

Tenslotte beschouwen wij het begrip permutatie nog wat nader.

Wij permuteren een aantal elementen $a_1, \dots, a_n$ en letten er bij een permutatie $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$ dezer elementen op hoe vaak twee elementen uit die permutatie een inversie vormen, d.w.z. hoe vaak een element met een hogere index voorafgaat aan een met een lagere index. Zo bevat de permutatie $a_1 a_3 a_5 a_2 a_4$ juist drie inversies.

Men noemt een permutatie even als zij een even aantal inversies bevat, oneven als zij er een oneven aantal bevat. De bovengenoemde permutatie is dus oneven.

Thans bewijzen wij de

Stelling. Als men in een permutatie twee elementen verwisselt, verandert haar pariteit (dat is het even of oneven zijn).

Beschouw voor het bewijs een permutatie $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$, waarin de twee elementen a_{k_i} en a_{k_j} worden verwisseld. Om te onderzoeken hoe hierdoor het aantal inversies zich heeft gewijzigd is het voldoende de elementen

$a_{k_i} a_{k_{i+1}} \dots a_{k_{j-1}} a_{k_j}$ te beschouwen want ten aanzien van de overige elementen is de positie van a_{k_i} en a_{k_j} niet veranderd.

Stel nu dat a_{k_i} met s der tussen a_{k_i} en a_{k_j} gelegen elementen een inversie vormde en met de overige $j-i-1-s$ elementen geen. Dan vormt na de ruiling a_{k_i} juist met $j-i-1-s$ van die tussenliggende elementen een inversie en met de overige s geen. Het aantal inversies dat a_{k_i} met die tussenliggende elementen maakt, is dus gewijzigd met een bedrag $j-i-1-s-s = j-i-1-2s$. Laat evenzo eerst t der elementen tussen a_{k_i} en a_{k_j} een inversie met a_{k_j} hebben gevormd en $j-i-1-t$ dus geen. Na de ruiling zijn deze aantallen dan resp. $j-i-1-t$ en t , zodat de toename van het aantal inversies $j-i-1-2t$ bedraagt. Bedenken wij dat door de ruiling het aantal inversies tussen a_{k_i} en a_{k_j} zelf van 0 op 1 of van 1 op 0 is gegaan, dan bedraagt de totale wijziging van het aantal inversies door het ruilen van a_{k_i} en a_{k_j} dus $j-i-1-2s+j-i-1-2t+1 = 2(j-i-1-s-t)+1$, en dit is een even bedrag, waarmede de stelling bewezen is.

Deze stelling geeft soms een gemakkelijk middel om de pariteit van een permutatie te bepalen. Beschouw b.v. de permutatie $a_1 a_3 a_5 a_2 a_4$. Ruilt men eerst a_2 met a_3 , dan a_3 met a_5 en dan a_4 met a_5 , dan krijgt men na deze drie ruilingen de even permutatie $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, zodat de oorspronkelijke permutatie oneven was.

Opg. 16. De permutatie $a_{k_1} \dots a_{k_n}$ is even als het product $\prod_{j>i} (a_{k_j} - a_{k_i})$ positief is en oneven als dat product negatief is.

Opg. 17. Er zijn evenveel even als oneven permutaties van n elementen, indien $n \geq 2$ is.

Blijkens opgave 17 zijn er dus $\frac{1}{2}n!$ even en $\frac{1}{2}n!$ oneven permutaties.

Opg. 18. Gegeven zijn $3n$ elementen waarvan er n gelijk zijn en de overige $2n$ elementen onderling verschillend zijn en ook verschillend van de n eerste gelijke elementen. Men vormt alle combinaties van n uit deze $3n$ elementen. Hoeveel dergelijke combinaties zijn er?

Opg. 19. Hoeveel combinaties van 3 letters kan men maken uit de letters van het woord "algebra"? Hoeveel variaties van 1, 2, 3 of 4 letters kan men maken uit de letters van het woord "elal"?

§ 4. De reststelling.

De reststelling luidt als volgt:

Indien men een veelterm $f(x)$ deelt door $x-a$, ontstaat een rest, die gelijk is aan $f(a)$.

Voor het bewijs beschouwen we een willekeurige veelterm

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Dus

$$f(a) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_{n-1}a + a_n,$$

derhalve

$$f(x) - f(a) = a_0(x^n - a^n) + a_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - a).$$

Elk der termen in het rechterlid is deelbaar door $x-a$; immers men heeft voor ieder natuurlijk getal p

$$x^p - a^p = (x-a)(x^{p-1} + ax^{p-2} + \dots + a^{p-1}).$$

Het rechterlid is dus zelf deelbaar door $x-a$; men vindt dan

$$f(x) - f(a) = (x-a)V(x),$$

waarin $V(x)$ een in verband met het bovenstaande gemakkelijk te bepalen veelterm in x voorstelt. De laatste betrekking geschreven in de gedaante

$$f(x) = (x-a)V(x) + f(a)$$

brengt juist tot uitdrukking, dat de rest bij deling van $f(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $f(a)$.

Opmerking. Op de bovenaangegeven wijze is een zodanige veelterm $V(x)$ geconstrueerd, dat $f(x) - (x-a)V(x)$ gelijk is aan een constante.

Gevolg. Als voor een veelterm $f(x)$ geldt $f(a) = 0$, is de rest, bij deling door $x-a$, gelijk aan $f(a) = 0$, zodat de beschouwde veelterm dan deelbaar is door $x-a$.

Voorbeelden. De veelterm $f(x) = x^3 - 3x - 2$ neemt voor $x=1$ de waarde -4 aan, dus de rest bij deling door $x-1$ is gelijk aan -4 .

Opg. 1. Bepaal ook het quotiënt bij de laatstbeschouwde deling op de bovenaangegeven wijze.

Dezelfde veelterm is deelbaar door $x-2$, want $f(2) = 0$.

Opg. 2. Bepaal de rest bij deling van

$$x^{30} - 4x^{24} + 5x^{17} - 6x^{11} + 2$$

door $x^5 - 1$.

Opg. 3. Voor welke waarde van het natuurlijke getal n is $(x+1)^n - x^n - 1$ deelbaar door $x+1$?

Zij thans gevraagd de rest bij deling van $f(x)$ door $(x-a)(x-b)$, waarin we $a \neq b$ onderstellen.

Wij weten reeds dat er een veelterm $g(x)$ bestaat, zodanig dat

$$(1) \quad f(x) = (x-a)g(x) + c.$$

Dezelfde overweging leert ons, dat er een veelterm $h(z)$ bestaat, zodanig, dat $g(x) = (x-b)h(x) + d$.

Derhalve is

$$f(x) = (x-a)(x-b)h(x) + d(x-a) + c.$$

De gezochte rest is dus $r = d(x-a) + c$. Deze bepalen we nu verder uit de betrekkingen, die men door substitutie direct vindt.

$$f(a) = c$$

$$f(b) = db - da + c, \text{ dus } d = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hieruit volgt $r(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + c - da =$

$$r(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + c - da = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

We hadden dit laatste resultaat iets vlugger gevonden door op te merken, dat blijkens (1) de rest van $f(x)$ na deling door $(x-a)(x-b)$ van de gedaante $mx+n$ is, dus

$$f(x) = (x-a)(x-b)g(x) + mx + n.$$

Derhalve

$$f(a) = am + n$$

$$f(b) = bm + n,$$

dus

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}; \quad n = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

De gevonden rest bleek te zijn die functie in x van de eerste graad, die voor $x = a$ een gegeven waarde $f(a)$ en voor $x = b$ een gegeven waarde $f(b)$ aanneemt. Zij thans gevraagd een veelterm van de graad $n-1$ te bepalen, die voor $x = a_1$ een waarde A_1 , voor $x = a_2$ een waarde A_2 , ..., en tenslotte voor $x = a_n$ een waarde A_n aanneemt.

Dit vraagstuk is op twee verschillende wijzen opgelost, nl. door Newton en Lagrange.

Wij geven hier thans de oplossing van Newton, die wij illustreren aan een bepaald voorbeeld. Zij gevraagd de cubische veelterm te bepalen, die voor $x = a, b, c, d$ resp. de waarden A, B, C, D aanneemt. We proberen de gezochte veelterm in de gedaante te vinden

$$(2) \quad f(x) = p + q(x-a) + r(x-a)(x-b) + s(x-a)(x-b)(x-c).$$

We bepalen eerst de onbekende coëfficiënt p door de substitutie $x = a$. Men vindt $p = f(a) = A$. Is p eenmaal bepaald, dan vindt men q door de substitutie $x = b$, die ons leert

$$A + q(b-a) = f(b) = B,$$

dus $q = \frac{B-A}{b-a}$, enz. Deze methode heeft het voordeel, dat de gevonden cubische veelterm gebruikt kan worden in alle gevallen, waarin een veelterm gevraagd wordt, die voor $x = a, b, c, d, e, \dots$ resp. de waarde $A, B, C, D, E, \dots$ aanneemt.

Het "beginstuk" van zo'n veelterm is juist het zoëven bepaalde gedeelte (2).

Opmerking. Deze methode om de gezochte veelterm te vinden is reeds toegepast bij het zoeken naar de rest bij deling van $f(x)$ door $(x-a)(a-b)$.

Opg. 4. Bepaal de quadratische veelterm, die in de punten -3 , 1 en 3 resp. de waarden 6 , 4 en 0 aanneemt.

Opg. 5. Bepaal de veelterm van de derde graad, die voor $x = 1, 2, 3, 4$ resp. gelijk is aan $1, 2, 4, 8$. Antwoord $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x$.

Opg. 6. Bepaal de veelterm van de derde graad, die in de punten $x = 1, 2, 3$ gelijk is aan nul.

Opg. 7. Hoe vindt men volgens de methode van Newton de meest algemene veelterm van de vierde graad, die voor $x = 1, 2, 3$ gelijk is aan nul?

Hoe de meest algemene veelterm van de vijfde graad?

§ 5. Nulpunten van veeltermen.

Een getal a heet een nulpunt van een veelterm $f(z)$ als geldt $f(a) = 0$.

Neemt men aan, dat elke veelterm $f(z)$ ten minste één nulpunt heeft dan levert de reststelling ons een belangrijk resultaat. Noem dit nulpunt z_1 . Dan is $f(z)$ volgens de reststelling deelbaar door $z-z_1$, dus er bestaat een veelterm $g(z)$, zodanig dat

$$f(z) = (z-z_1)g(z).$$

De graad van $g(z)$ is één lager dan die van $f(z)$. Is de graad van $f(z)$ groter dan 1 , dan is van $g(z)$ de graad ≥ 1 , zodat er, alweer volgens bovengenoemde stelling, een getal z_2 bestaat met $g(z_2) = 0$, dus wegens de reststelling bestaat er een veelterm $h(z)$ met $g(z) = (z-z_2)h(z)$, derhalve

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)h(z).$$

Zo voortgaande vindt men

$$(1) \quad f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)k,$$

waarin n de graad van $f(z)$ aangeeft en k een constante voorstelt.

Is $f(z)$ van de gedaante

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

dan vindt men, door in de beide leden der betrekking (1) de coëfficiënten van z^n te vergelijken, het resultaat $k = a_0$, zodat we uiteindelijk vinden

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n).$$

Indien men het rechterlid van de laatstgevonden betrekking uitwerkt, levert vergelijking der coëfficiënten van z^{n-1} links en rechts

$$a_1 = -a_0(z_1+z_2+\dots+z_n).$$

Zo voortgaande kunnen we elk der coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$ uitdrukken in a_0 en de getallen $z_1, \dots, z_n$. Hierop komen we later terug.

Opg. 2. Bewijs $a_n = a_0(-)^n z_1 z_2 \dots z_n$.

Opg. 3. Beschouw de vergelijking $x^4 - 33x^2 + 20x + 12 = 0$.

Toon aan dat iedere gehele wortel dezer vergelijking een deler is van het getal 12 en bepaal daarna alle gehele wortels van deze vergelijking.

Zij gegeven een vergelijking

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Dan vindt men een vergelijking waarvan alle wortels k groter zijn dan de resp. wortels der gegeven vergelijking door z in de gegeven vergelijking te vervangen door $z-k$.

Dan ontstaat de vergelijking

$$f(z-k) = a_0(z-k)^n + a_1(z-k)^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Bewijs. Zij z_1 een wortel van de oorspronkelijke vergelijking. Dan heeft men dus de betrekking $f(z_1) = 0$. Dus $f(z_1+k-k) = 0$ en dit houdt in dat het getal z_1+k een wortel is van de nieuwe vergelijking $f(z-k) = 0$.

Opg. 4. De wortels der vergelijking $f(\frac{z}{a}) = 0$ zijn a keer zo groot als die van de vergelijking $f(z) = 0$.

Opg. 5. Bepaal de vergelijking waarvan de wortels de reciproken zijn van die van de vergelijking $f(z) = 0$.

Opg. 6. Bewijs dat voor de vergelijking

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

waarin $a_n \neq 0$, geldt

$$\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Opg. 7. Bepaal de vergelijking, waarvan de wortels gelijk zijn aan de derdemachtswortels van die van de vergelijking

$$z^2 - 7z - 8 = 0.$$

Opg. 8. Bepaal de vergelijking waarvan de wortels de derdemachten zijn van die van de vergelijking $z^2 - 7z - 8 = 0$.

Opg. 9. Zijn de wortels van de vergelijking $z^3 + 3z^2 + 5z + 7 = 0$ gelijk aan z_1, z_2, z_3 , bepaal dan een vergelijking met wortels

$$4z_1 + 3, \quad 4z_2 + 3, \quad 4z_3 + 3.$$

Definitie. Een getal a is een tweevoudig of dubbel nulpunt van de veelterm $f(z)$, als er een veelterm $g(z)$ bestaat, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^2 g(z),$$

maar geen veelterm $h(z)$, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^3 h(z).$$

In het algemeen heet een getal a een k -voudig nulpunt van de veelterm $f(z)$, als er een veelterm $g(z)$ bestaat, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

maar geen veelterm $h(z)$, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^{k+1} h(z).$$

Wij bewijzen nu de volgende stelling

Stelling. Als a een k -voudig nulpunt is van een veelterm $f(z)$ (waarin $k \geq 2$ is), dan is a een $(k-1)$ -voudig nulpunt van de afgeleide veelterm

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}.$$

Bewijs: Uit de onderstelling volgt, dat een veelterm $g(z)$ te vinden is met $f(z) = (z-a)^k g(z)$, waarbij $g(z)$ niet deelbaar is door $z-a$. Volgens de regels van differentiëren van een product heeft men dan

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z) = (z-a)^{k-1}h(z),$$

waarbij

$$h(z) = kg(z) + (z-a)g'(z).$$

Omdat $h(z)$ niet deelbaar is door $z-a$ (want $g(z)$ is het niet), is $z-a$ juist een $(k-1)$ -voudig nulpunt van $f'(z)$.

Gevolg: Als a een k -voudig nulpunt is van $f(z)$ en als het natuurlijke getal $h < k$ is, dan is a een $(k-h)$ -voudig nulpunt van $\frac{d^h f(z)}{dz^h}$.

Opg. 10. Als a een k -voudig nulpunt is van $f(z)$, onderzoek dan of a een nulpunt kan zijn van $f^{(k+1)}(z)$. Geef voorbeelden van het gevonden resultaat.

Opg. 11. Toon aan, dat als de vergelijking

$$z^2 + pz + q = 0$$

een dubbele wortel bezit, de relatie $\frac{1}{4}p^2 - q = 0$ geldt.

Opg. 12. Bepaal de meervoudige wortels van de vergelijking

$$z^4 - z^3 - 5z^2 + 12 = 0.$$

Wenst men bij een vergelijking $f(z) = 0$ alle meervoudige wortels a te vinden, dan zoekt men dus wortels zowel van $f(z) = 0$ als van $f'(z) = 0$, zodat beide veeltermen $f(z)$ en $f'(z)$ deelbaar zijn door $z-a$. Men kan het getal a dan vinden door de G.G.D. $g(z)$ te bepalen van de veeltermen $f(z)$ en $f'(z)$, welke veelterm $g(z)$ dan eveneens door $z-a$ deelbaar is. Iedere wortel van $g(z) = 0$ is voorts een meervoudige wortel van $f(z)$.

Opg. 13. De vergelijking $z^4 - 4z + a = 0$ heeft een reële meervoudige wortel. Bepaal deze en los de vergelijking daarna op.

Opg. 14. Bepaal de dubbele wortels van $(z+1)^7 - z^7 - 1 = 0$ en los de vergelijking daarna op.

Een getal heet algebraïsch, als het een nulpunt is van een veelterm met rationale (dus ook van een veelterm met reële) coëfficiënten.

Opg. 15. De getallen i , $\sqrt[3]{2+i}$, $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\sqrt[n]{n}$ zijn algebraïsch

Opmerking. Met behulp van niet-algebraïsche hulpmiddelen is in 1882 door Lindemann bewezen dat de getallen e en π niet algebraïsch zijn.

§ 6. De binomiaalvergelijking.

Een binomiaalvergelijking is een vergelijking van de gedaante $az^n + bz^m = 0$.

Hierin stellen a en b gegeven complexe getallen voor; n en m zijn natuurlijke getallen.

Wij mogen veronderstellen $a \neq 0$, $b \neq 0$ en verder kunnen we, zonder de algemeenheid te schaden, aannemen $n > m$.

De vergelijking neemt dan de gedaante aan

$$a z^m (z^{n-m} + \frac{b}{a}) = 0.$$

Behalve m wortels $z = 0$ vinden we nog wortels, die voldoen aan $z^{n-m} + \frac{b}{a} = 0$.

Stel $n - m = p$; $-\frac{b}{a} = A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Dan is

$$z^p = A(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

waarvan de wortels zijn

$$z = \sqrt[p]{A} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{p} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{p} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

Toepassing. Gevraagd wordt de wortels te vinden van

$$z^{10} = 1 + i.$$

Men heeft $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, dus

$$z = \sqrt[20]{2} \left(\cos \frac{5+4k}{20} \pi + i \sin \frac{5+4k}{20} \pi \right) \quad (k = 0, 1, \dots, 9).$$

Opg. 1. Bereken de wortels uit i , d.w.z. los op de vergelijking $z^2 = i$.

Opg. 2. Als de vergelijking $z^n = a$ een dubbele wortel heeft, heeft zij zelfs een n -voudige wortel.

Speciale aandacht verdient de vergelijking

$$z^n = 1$$

met de n wortels

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Deze getallen z_k liggen allen op de eenheidscirkel en vormen de hoekpunten van een regelmatige n -hoek.

De niet-reële wortels dezer vergelijking zijn paarsgewijze toegevoegd complex.

Men heeft dus $z_k = \bar{z}_{n-k}$ ($k = 1, \dots, n-1$).

Opg. 3. Bewijs dit.

Het oplossen der vergelijking $z^3 = 1$ levert ons dus de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Men vindt uit $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$ direct de wortels

$$z_1 = 1, \quad z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}.$$

Hieruit vindt men dus de bekende formules uit de goniometrie terug

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Gewoonlijk geeft men het getal $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ aan door de letter ρ .

Opg. 4. Bewijs: $z_3 = z_2^2$; $z_2 = z_3^2$; $z_2 + z_3 = -1$; $z_2 z_3 = 0$.

De 3 derdemachtswortels uit een getal a zijn van de gedaante α , $\alpha\rho$ en $\alpha\rho^2$, waarbij α een der wortels van $z^3 = a$ voorstelt.

Opg. 5. Bewijs dit.

Ook de formules voor regelmatige vijf- en tienhoek zijn te vinden met boven behandelde methode.

We lossen daartoe op de vergelijking $z^5 = 1$, dus afgezien van de wortel $z = 1$ hebben we de wortels te zoeken van de vergelijking $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ welke we door een kunstgreep kunnen bepalen. Voer nl. de hulpgrootte $u = z + \frac{1}{z}$ in, dan gaat onze vergelijking over in

$$u^2 + u - 1 = 0$$

Nadat hieruit u bepaald is vindt men uit $u = z + \frac{1}{z}$ de gezochte vier andere wortels van $z^5 - 1 = 0$.

Opg. 6. Voer dit uit,

Opmerking: Het is door de wiskundige Gauss aangetoond, dat op deze wijze de wortels van $z^{17} - 1 = 0$ gevonden kunnen worden en dat de zijde der regelmatige 17-hoek kan worden geconstrueerd met passer en lineaal. Gauss toonde aan dat slechts construeerbaar zijn de zijden der regelmatige n -hoek, waarbij

$$n = 3, 5, 17, 257, \dots$$

of een product van een willekeurige macht van het getal 2 en de eerste macht van een willekeurig aantal der getallen 3, 5, 17, 257,

De laatste rij getallen is de rij der priemgetallen van de gedaante $2^m + 1$. Een zodanig getal p kan slechts priem zijn als m zelf een macht van 2 is, dus zo'n getal p moet zeker van de gedaante

$p = 2^{2^k} + 1$ zijn ($k = 0, 1, 2, \dots$). Niet alle getallen van deze gedaante zijn echter priem want voor $k = 5$ vindt men het getal $2^{32} + 1$, dat, zoals Euler in 1753 heeft opgemerkt, deelbaar is door 641. Het getal $2^{64} + 1$ is deelbaar door 274177 (in 1880 door Landry bewezen). Voor $k = 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38$ en 73 heeft men ook kunnen bevestigen dat $2^{2^k} + 1$ niet priem is. Het getal $2^{16} + 1 = 65537$ is wel priem; de regelmatige 65537-hoek is dus volgens Gauss te construeren met passer en lineaal. De getallen $2^{2^k} + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) heten de getallen van Fermat.

Opg. 7. Men vermindert de wortels der vergelijking $z^n - 1 = 0$ allen met 1, dus beschouwt de wortels van de vergelijking $(w+1)^n - 1 = 0$.

Opg. 8. Bewijs dat een veelterm van de n^e graad geen $(n+1)$ -voudig nulpunt kan bezitten. Schrijf een vergelijking van de n^e graad op, die een n -voudig nulpunt bezit.

Opg. 7. Men vermindert de wortels der vergelijking $z^n - 1 = 0$ alle met 1, dus beschouwt de wortels van de vergelijking $(w+1)^n - 1 = 0$. Bewijs door beschouwing der laatste vergelijking dat het product der koorden die in een regelmatige n-hoek, beschreven in de eenheidscirkel, één hoekpunt verbinden met elk der andere hoekpunten, gelijk is aan n.

Opg. 8. Bewijs

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

§7. Rekenwijze van Horner.

Voor veeltermen $f(x)$ hoogstens van de n^e graad geldt de reeksontwikkeling van Taylor

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Voor het bewijs merke men op, dat deze formule onmiddellijk volgt uit de binomiaalformule van Newton, als $f(x)$ gelijk is aan een macht van x , waarvan de exponent geheel, niet negatief en hoogstens n is. Hieruit ziet men gemakkelijk in dat de formule dan algemeen geldt voor willekeurige veeltermen.

Om $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ voor $x = p$ te berekenen, als de coëfficiënten en p gegeven zijn, past men de rekenwijze van Horner toe

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ & \nearrow pa_0 & \nearrow pa'_1 & \dots & \nearrow pa'_{n-3} & \nearrow pa'_{n-2} & \nearrow pa'_{n-1} & + \\ a_0 & a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{n-2} & a'_{n-1} & \boxed{a'_n} \end{array}$$

De bedoeling is dus, dat a_0 eerst met p wordt vermenigvuldigd; het verkregen resultaat met a_1 vermeerderd, levert een getal, dat we a'_1 hebben genoemd. Dit getal a'_1 wordt weer met p vermenigvuldigd. Het aldus verkregen resultaat levert, met a_2 vermeerderd, een getal op, dat we a'_2 genoemd hebben, enz. Zo doorgaande vinden we een getal, a'_{n-1} , dat weer met p wordt vermenigvuldigd, terwijl de aldus verkregen uitkomst, met a_n vermeerderd, een som oplevert, die we a'_n genoemd hebben. Wij beweren, dat deze som juist gelijk is aan de waarde, die de functie $f(x)$ in het punt $x=p$ aanneemt. Dit is trouwens duidelijk, want

$$a'_1 = pa_0 + a_1;$$

$$a'_2 = pa'_1 + a_2 = p^2 a_0 + pa_1 + a_2;$$

$$a'_3 = p^3 a_0 + p^2 a_1 + pa_2 + a_3;$$

en ten slotte

$$a'_n = p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + \dots + pa_{n-1} + a_n.$$

Het hierboven aangegeven schema van Horner is het verkort delingsschema, dat men verkrijgt, als $f(x)$ door $x-p$ wordt gedeeld, nl.:

$$\begin{array}{r}
 x-p \overline{) a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n} \\
 \underline{a_0 x^n - p a_0 x^{n-1}} \\
 a'_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \\
 \underline{a'_1 x^{n-1} - p a'_1 x^{n-2}} \\
 a'_2 x^{n-2} \dots \dots \dots \underline{-p a'_{n-2} x} \\
 a'_{n-1} x + a_n \\
 \underline{a'_{n-1} x - p a'_{n-1}} \\
 a'_n
 \end{array}$$

Ook hieruit blijkt weer onmiddellijk, dat a'_n de waarde is, die de veelterm $f(x)$ voor $x=p$ aanneemt, want a'_n is de rest, die $f(x)$ bij deling door $x-p$ overlaat. Het voordeel van de rekenwijze van Horner is, dat ze ons niet alleen de rest leert, die $f(x)$ bij deling door $x-p$ oplevert maar ook het **quotient**, nl. $a'_0 x^{n-1} + a'_1 x^{n-2} + \dots + a'_{n-1}$.

Om bv. $x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ voor $x = 2$ te bepalen, schrijven we

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -6 \quad 7 \quad -5 \\
 \underline{2 \quad -8 \quad -2 \quad +} \\
 1 \quad -4 \quad -1 \quad \boxed{-7} = f(2)
 \end{array}$$

Verder is $f(x) = (x-2) g(x) - 7$, waarin $g(x) = x^2 - 4x - 1$.

Luidt de opgave $f(x)$ te ontwikkelen naar machten van $x-2$, dan passen we het proces op $g(x)$ toe, enz., zodat we het volgende schema vinden:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -6 \quad 7 \quad -5 \\
 \underline{2 \quad -8 \quad -2 \quad +} \\
 1 \quad -4 \quad -1 \quad \boxed{-7} \\
 \underline{2 \quad -4 \quad +} \\
 1 \quad -2 \quad \boxed{-5} \\
 \underline{2} \\
 \boxed{1} \quad \boxed{0}
 \end{array}$$

Aldus vinden we $f(x) = -7 - 5(x-2) + (x-2)^3$.

Is een veelterm $f(x)$ van de n^e graad in $n+1$ verschillende punten $x_0, x_1, \dots, x_n$ gegeven, dan is die veelterm ondubbelzinnig bepaald, omdat twee verschillende veeltermen met deze eigenschap een verschil zouden bezitten, hoogstens van de n^e graad met meer dan n nulpunten.

Zoals wij in § 4 zagen, kunnen we die veelterm bepalen door te stellen

$$f(x) = a_0(x-x_1) \dots (x-x_n) + a_1(x-x_2) \dots (x-x_n) + \dots + a_{n-1}(x-x_n) + a_n.$$

Stelt men hierin $x = x_n$, dan vindt men $f(x_n) = a_n$, zodat de coëfficiënt a_n bekend is. Stelt men vervolgens $x = x_{n-1}$, dan krijgt men $f(x_{n-1}) = a_{n-1}(x_{n-1}-x_n) + a_n$, waaruit a_{n-1} kan worden bepaald, enz. Zijn $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ bekend, dan krijgt men door $x = x_0$ te stellen

$$f(x_0) = a_0(x_0-x_1) \dots (x_0-x_n) + \dots + a_{n-1}(x_0-x_n) + a_n,$$

waaruit ten slotte a_0 kan worden bepaald. De aldus voor $f(x)$ verkregen formule heet de interpolatieformule van Newton.

Hierbij moeten achtereenvolgens de coëfficiënten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ worden bepaald, hetgeen dikwijls een heel werk is.

We kunnen ons nu de opgave voorleggen om bij een veelterm $f(x)$ van de n^e graad van bovenstaande gedaante (waarbij dus $x_1, \dots, x_n$ en $a_0, \dots, a_n$ bekend verondersteld worden) de waarde van de veelterm $f(x)$ te berekenen in een willekeurig voorgeschreven punt p . Daarbij krijgen we het volgende schema.

Factor	$x-x_1$	$x-x_2$	$x-x_3$	$x-x_n$	
Coëff.	a_0	a_1	a_2	$a_3 \dots a_{n-1}$	a_n
	$a_0(p-x_1)$	$a'_1(p-x_2)$	$a'_2(p-x_3)$	$\dots a'_{n-2}(p-x_{n-1})$	$a'_{n-1}(p-x_n)$
	a_0	a'_1	a'_2	$a'_3 \dots a'_{n-1}$	a'_n

De bedoeling is, dat a_0 eerst met $p-x_1$ wordt vermenigvuldigd. Het verkregen resultaat, met a_1 vermeerderd, levert een getal, dat we a'_1 hebben genoemd. Dit getal a'_1 wordt met $p-x_2$ vermenigvuldigd. Het aldus verkregen resultaat levert, met a_2 vermeerderd, een getal op, dat we a'_2 genoemd hebben, enz. Zo doorgaande vinden we een getal a'_{n-1} , dat, met $p-x_n$ wordt vermenigvuldigd, terwijl de aldus verkregen uitkomst, met a_n vermeerderd, een som oplevert, die we a'_n hebben genoemd. We beweren thans, dat deze som a'_n juist gelijk is aan de waarde, die de functie $f(x)$ in het punt $x=p$ aanneemt. Dit is trouwens eveneens duidelijk, want

$$a'_1 = (p-x_1)a_0 + a_1$$

$$a'_2 = (p-x_1)(p-x_2)a_0 + (p-x_2)a_1 + a_2$$

$$a'_3 = \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a'_n = (p-x_1) \dots (p-x_n)a_0 + \dots + (p-x_n)a_{n-1} + a_n$$

en die laatste uitdrukking is juist gelijk aan $f(p)$.

Indien bv. $f(x)$ de veelterm voorstelt van de 4e graad, die voor $x = 3, 4, 7, 8, 9$ resp. de waarden 5, 11, 5, 75 en 41 aanneemt, dan vindt men na berekening

$$f(x) = 5 + 6(x-3) - 2(x-3)(x-4) + 4(x-3)(x-4)(x-7) - 3(x-3)(x-4)(x-7)(x-8).$$

Bij de berekening van $f(1)$ krijgen we het volgende schema:

Factoren		-7	-6	-3	-2	
Coëff.	-3	4	-2	6	5	
		21	-150	456	-924	+
	-3	25	-152	462	-919	= f(1)

De berekening van $f(2)$ gaat als volgt:

Factoren		-6	-5	-2	-1	
Coëff.	-3	4	-2	6	5	
		18	-110	224	-230	+
	-3	22	-112	230	-225	= f(2).

En ten slotte die van $f(2,1)$:

Factoren		-5,9	-4,9	-1,9	-0,9	
Coëff.	-3	4	-2	6	5	
		17,7	-106,33	205,827	-190,6443	+
	-3	21,7	-108,33	211,827	-185,6443	= f(2,1).

§ 8. Het theorema van Budan-Fourier.

Als X een nulpunt is van een veelterm $f(x)$, dan kunnen we het grootste natuurlijke getal m bepalen met de eigenschap, dat $f(x)$ door $(x-X)^m$ deelbaar is. ~~Daar~~ m is de multipliciteit van het nulpunt X en X heet een m -voudig nulpunt van de veelterm. We hebben dan $f(x) = (x-X)^m g(x)$, waarin $g(x)$ een veelterm voorstelt, die niet door $x-X$ deelbaar is en die dus in het punt X niet nul is. Door differentiatie vinden we, dat de functie $f(x)$ met haar 1e, 2e, ..., $(m-1)^e$ afgeleide in X gelijk is aan nul, maar dat de m^e afgeleide in dat punt ongelijk aan nul is. De reeksontwikkeling van Taylor geeft dan

$$f(X+h) = \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(X) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(X).$$

Deze uitdrukking heeft voor kleine waarden van h een vast teken, als de multipliciteit m even is, maar wisselt van teken, als m oneven is. Hiermede is bewezen:

Als $f(x)$ in X een nulpunt met even multipliciteit bezit, dan heeft $f(x)$ in de omgeving van X , aan weerszijden van X , hetzelfde teken. Bezit daarentegen $f(x)$ in X een nulpunt met oneven multipliciteit, dan heeft $f(x)$ in de omgeving van X , aan weerszijden van X , tegengesteld teken. Meetkundig uitgedrukt: In een nulpunt met oneven multipliciteit wordt de X -as gesneden door de kromme $y = f(x)$. In de omgeving van een nulpunt met even multipliciteit ligt de kromme aan een bepaalde kant van de X -as.

Beschouw twee getallen a en b , waarbij $a < b$ en een veelterm $f(x)$. We kunnen steeds een natuurlijk getal k kleiner dan of gelijk aan de graad

van de veelterm $f(x)$ bepalen, zodanig dat de k^e afgeleide van $f(x)$ tussen a en b steeds positief en steeds negatief is. Immers we kunnen steeds k gelijk kiezen aan de graad van de veelterm $f(x)$, maar in vele gevallen zal het zo mogelijk aanbeveling verdienen k kleiner te kiezen. Beschouw het systeem gevormd door de getallen $f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x)$. We beschouwen het aantal tekenwisselingen, dat men verkrijgt, als men de eventuele termen 0 buiten beschouwing laat. B.v. in een systeem $+ 0 0 - + 0 + -$ is het aantal tekenwisselingen 3 . Het aantal tekenwisselingen zal niet veranderen als aan het begin of aan het einde van het systeem nullen worden toegevoegd. Het aldus gedefinieerde aantal tekenwisselingen wordt met $V(x)$ aangeduid. Het blijkt, dat de verandering van het aantal tekenwisselingen ons iets leert over het aantal nulpunten van de veelterm $f(x)$, gelegen tussen a en b . Dit resultaat kan worden samengevat in het volgende theorema, dat genoemd wordt naar Budan-Fourier:

Zij $a < b$, waarin a en b geen van beide nulpunten van de veelterm $f(x)$ voorstellen. De afname $V(a) - V(b)$ van het aantal tekenwisselingen is een geheel getal $p \geq 0$ en het aantal der tussen a en b gelegen nulpunten van $f(x)$, waarbij elk nulpunt even vaak geteld wordt, als zijn multipliciteit bedraagt, is gelijk aan p , of een even aantal minder.

Het theorema van Budan-Fourier heeft het voordeel, dat daarin uitsluitend veeltermen optreden, die gemakkelijk neer te schrijven zijn (nl. de afgeleiden), maar het nadeel is, dat het aantal nulpunten niet altijd ondubbelzinnig wordt bepaald.

Om deze stelling te bewijzen, laten we x aangroeien van a naar b . Het aantal tekenwisselingen kan alleen verspringen in een punt, waar de veelterm $f(x)$ of minstens een zijner afgeleiden de waarde nul aanneemt. Laten we eerst een tussen a en b gelegen punt X beschouwen, waar de veelterm $f(x)$ zelf niet gelijk is aan nul, maar, waarin minstens een der afgeleiden wel de waarde 0 aanneemt. Laten we eerst het geval bekijken, waarin het aantal opeenvolgende afgeleiden, die in X de waarde 0 aannemen, even is. (Om de gedachte te bepalen nemen we voor dat aantal 4 , maar we kunnen er elk positief even aantal voor nemen.) Het gedeelte van het systeem, waar het hier op aan komt, heeft de volgende gedaante:

	$f^{(r-4)}$	$f^{(r-3)}$	$f^{(r-2)}$	$f^{(r-1)}$	$f^{(r)}$	$f^{(r+1)}$
I	$\pm$	0	0	0	0	$+$

of

II	$\mp$	0	0	0	0	$-$
----	-------	-----	-----	-----	-----	-----

De vier nullen in dit schema corresponderen met de 4 opeenvolgende afgeleiden $f^{(r-3)}(x), f^{(r-2)}(x), f^{(r-1)}(x), f^{(r)}(x)$, die voor X de waarde 0 aannemen. We onderscheiden nu 2 gevallen, al naar gelang I of II optreedt.

In geval I is $f^{(r+1)}(x)$ in de omgeving van X positief, zodat $f^{(r)}(x)$ in die omgeving links van X negatief en rechts van X positief is. Daaruit blijkt, dat de voorafgaande afgeleide $f^{(r-1)}(x)$ in die omgeving aan weerskanten van X positief is, dus dat de daaraan voorafgaande afgeleide $f^{(r-2)}(x)$ in die omgeving links van X negatief is en rechts van X positief. Tenslotte blijkt dan, dat de afgeleide $f^{(r-3)}(x)$ in die omgeving wederom positief is. Het systeem vertoont dus in de omgeving van X, links van X de volgende tekens:

$\pm \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad ,$

maar rechts van X ziet het er als volgt uit:

$\pm \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad .$

Het aantal tekenwisselingen bedroeg dus eerst 4 of 5 en later 0 of 1. Bij het passeren van X zijn dus 4 tekenwisselingen verloren gegaan, niet aan het begin van de rij, maar ergens in het midden.

Geval I gaat in geval II over, als alle tekens worden omgekeerd, zodat ook hierbij weer ergens in het midden 4 tekenwisselingen verloren zijn gegaan.

Laten we vervolgens het geval beschouwen, dat het aantal opeenvolgende afgeleiden, die in X de waarde 0 aannemen, oneven is. Om onze gedachte te bepalen, nemen wij voor dat aantal 3. Het gedeelte van het systeem, waar het hier op aan komt, heeft de gedaante

III $\quad \pm \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad +$

of

IV $\quad \mp \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -.$

Gemakkelijk ziet men in, dat in geval III het systeem in de omgeving van X, links van X, de tekens

$\pm \quad - \quad + \quad - \quad +$

en rechts van X de tekens

$\pm \quad + \quad + \quad + \quad +$

vertoont. Het aantal tekenwisselingen bedraagt dan links 4 of 3 en rechts 0 of 1. Bij het passeren van X zijn dus ergens in het midden 4 of 2 tekenwisselingen verloren gegaan. Geval III gaat in geval IV over, als alle tekens worden omgekeerd, zodat ook hier weer ergens in het midden 4 of 2 tekenwisselingen verloren zijn gegaan. Aldus komen we tot de volgende conclusie:

Zij X een tussen a en b gelegen punt, waarin niet de veelterm $f(x)$ zelf, maar minstens één zijner afgeleiden de waarde 0 aanneemt. Bij het passeren van een zodanig punt X blijft het aantal tekenwisselingen constant of neemt met een even aantal af.

Opg. 1. Licht toe, dat uit het bovenstaande niet volgt, dat bij het passeren van een zodanig punt X het aantal tekenwisselingen altijd afneemt.

Nu moeten we nog onderzoeken, wat er gebeurt, als we een tussen a en b gelegen nulpunt X van de veelterm $f(x)$ zelf passeren. Zij X een m-voudig nulpunt van $f(x)$, zodat $f^{(m)}(X) \neq 0$ is.

Opg. 2. Waarom is $m \leq k$?

Het gedeelte van het systeem $V(X)$, waar het nu op aan komt, heeft de gedaante

V 0 0 0 0 0 +

of

VI 0 0 0 0 0 -,

al naar gelang $f^{(m)}(X)$ positief of negatief is. In geval V vertoont het systeem in de omgeving van X, links van X, de tekens

$(-1)^m (-1)^{m-1} . . . - + - +$

en rechts van X de tekens

$+ + . . . + + + + .$

Het aantal tekenwisselingen bedraagt dus eerst m en later 0, zodat er bij het passeren van X juist m tekenwisselingen verloren zijn gegaan.

Geval V gaat in geval VI over, als alle tekens worden omgekeerd, zodat ook dan bij het passeren van X weer m tekenwisselingen verloren zijn gegaan. Bij het passeren van een nulpunt X van de veelterm $f(x)$ gaan dus aan het begin evenveel tekenwisselingen verloren, als de multipliciteit van X bedraagt. Aldus komen wij tot het volgende besluit:

Groeit X geleidelijk aan van a naar b, dan kunnen in het systeem tekenwisselingen verloren gaan, vooreerst aan het beginpunt en dan is het verlies juist gelijk aan de multipliciteit van het gepasseerde nulpunt, en verder ergens in het midden, maar dan is het verlies steeds even. Hiermede is de stelling van Budan-Fourier bewezen.

Dit theorema geldt trouwens niet alleen voor veeltermen, maar voor alle functies $f(x)$ die een k^e afgeleide bezitten, welke tussen a en b steeds positief of steeds negatief is.

Opg. 3. Pas het theorema van Budan-Fourier toe op de veelterm

$$(1) \quad x^4 + 3x^3 - 6x + 1$$

waarbij a = 0 en b positief heel groot wordt gekozen. Het theorema levert dan , dat de veelterm 0 of 2 positieve nulpunten bezit. Bewijs verder, dat deze veelterm er werkelijk 2 bezit. Het theorema van Budan-Fourier levert dus, dat bij deze vergelijking het aantal positieve wortels gelijk is aan, of een even aantal minder dan, het aantal tekenwisselingen, voorkomend in het systeem (1, 3, 0, -6, 1), gevormd door de coëfficiënten. Op analoge manier bewijst men het algemene

Theorema van Descartes. In een algebraïsche vergelijking met bestaanbare coëfficiënten is het aantal positieve wortels gelijk aan, of een even aantal minder dan, het aantal tekenwisselingen, optredend in het coëfficiëntensysteem.

Opg. 4. Door x te vervangen door $-y$ vindt men, dat de vergelijking (1) 0 of 2 negatieve wortels bezit.

Opg. 5. De vergelijking

$$x^{11} + ax^7 - bx^6 + cx^3 - d = 0,$$

waarin a , b , c en d positief zijn, heeft 1 of 3 positieve wortels en geen negatieve. Aanvaardt men de grondstelling van de algebra, dat elke algebraïsche vergelijking evenveel wortels bezit, als de graad bedraagt, dan verkrijgt men, dat de beschouwde vergelijking 10 of 8 onbestaanbare wortels bezit. Het hiaat tussen x^{11} en x^7 levert minstens 4 onbestaanbare wortels, dat tussen x^6 en x^3 levert er minstens 2 en dat tussen x^3 en x^0 eveneens.

Opg. 6. De vergelijking

$$x^{11} + ax^7 + bx^5 - cx + d = 0,$$

waarin a , b , c en d positief zijn, bezit 0 of 2 positieve, verder 1 negatieve wortel, dus 10 of 8 onbestaanbare. Het hiaat tussen x^{11} en x^7 levert er minstens 4, het hiaat tussen x^7 en x^5 2 (omdat dit een hiaat is van een term tussen een permanentie), het hiaat tussen x^5 en x ook minstens 2 (omdat dit een hiaat is van 3 termen tussen een variatie).

Opg. 7. Bewijs, dat de vergelijking

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0,$$

0 of 2 wortels tussen 0 en 1,

1 wortel tussen 1 en 6,

1 wortel tussen -1 en 0,

en geen enkele wortel groter dan 6 of kleiner dan -1 bezit.

Om de tekens te bepalen, ontwikkelde men met behulp van de rekenwijze van Horner naar machten van $x-1$ en $x+1$, waarbij de berekening kan worden stopgezet, zodra blijkt, welke tekens verder zullen optreden.

§ 9. Het theorema van Sturm. De stelling van Budan-Fourier heeft het nadeel dat ze niet steeds het aantal wortels in een gegeven interval onduidelzinning vastlegt. Dit noopt ons een ander theorema af te leiden, het theorema van Sturm, waardoor het aantal wortels in een gegeven interval wel vastgelegd wordt.

Om te bepalen, hoeveel nulpunten een gegeven veelterm $f_0(x)$, die louter enkelvoudige nulpunten heeft, in een gegeven interval $a \leq x \leq b$ bezit, beschouwen wij een rij veeltermen $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_k(x)$, verbonden door de volgende teruglopende betrekkingen:

$$f_0(x) = q_1(x)f_1(x) - f_2(x)$$

$$f_1(x) = q_2(x)f_2(x) - f_3(x)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1}(x)f_{k-1}(x) - f_k(x),$$

waarbij $f_1(x) = f'(x)$ en waarin $q_1(x), \dots, q_{k-1}(x)$ eveneens veeltermen voorstellen. Wij nemen daarbij aan, dat de veelterm $f(x)$ in geen der punten a en b de waarde nul aanneemt en dat $f_k(x)$ voor $a \leq x \leq b$ steeds positief of steeds negatief is.

Onder $V(x)$ verstaan wij het aantal tekenvariatiën, optredende in het systeem $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$ en we zullen nagaan, wat er met dit aantal gebeurt, als x monotoon en geleidelijk aangroeit van a naar b . Laten we eerst het geval beschouwen, dat x een nulpunt ξ van minstens een der veeltermen $f_h(x)$ ($1 \leq h < k$) passeert. Was ξ ook een nulpunt van de voorgaande veelterm $f_{h-1}(x)$, dan was ξ volgens de hierboven gegeven teruglopende betrekkingen ook een nulpunt van $f_{h-2}(x), f_{h-3}(x), \dots, f_0(x)$ en dus van $f'_0(x)$, zodat ξ een meervoudig nulpunt van $f_0(x)$ zou zijn, in strijd met de veronderstelling. Dus $f_{h-1}(x)$ en $f_{h+1}(x)$ hebben volgens de recurrente betrekking in de omgeving van ξ tegengesteld teken, zodat het aantal tekenvariatiën links van ξ even groot als rechts van ξ is. Stel x passeert nu een nulpunt ξ van $f_0(x)$. In de omgeving van dat punt is $f_0(x)$, en ook $f_1(x) = f'_0(x)$, ongelijk aan nul. Is $f_1(x)$ in die omgeving van ξ positief, dan neemt $f_0(x)$ aldaar toe en wordt dus van negatief positief; is daarentegen $f_1(x)$ in de omgeving van ξ negatief, dan wordt $f_0(x)$ van positief negatief. Bij het passeren van het nulpunt ξ van $f_0(x)$ is dus juist één tekenvariatie verloren gegaan.

Aldus komen wij tot het volgende besluit:

Theorema van Sturm: Groeit x geleidelijk en monotoon aan van a naar b , dan is het verlies $V(a) - V(b)$ van het aantal tekenvariatiën in het systeem $f_0(x), \dots, f_k(x)$ gelijk aan het aantal tussen a en b gelegen nulpunten van $f_0(x)$.

Opmerking: Indien in het interval $a \leq x \leq b$ voor $h = 1, \dots, n$ geldt $f_h(x) = g_h(x)p_h(x)$ met $p_h(x) > 0$, dan kan men de rij anders voortzetten door te nemen

$$f_{n-1}(x) = r_n(x)g_n(x) - g_{n+1}(x) \quad (n = 1, \dots, l-1).$$

Het laat zich dan aantonen, dat het aantal nulpunten van $f_0(x)$ in het beschouwde interval dan gelijk is aan $W(a) - W(b)$, waarbij $W(x)$ het aantal tekenwisselingen aangeeft van de rij functies

$$f_0(x), g_1(x), \dots, g_l(x).$$

Opg. 1. Bewijs dit.

Opg. 2. Bepaal het aantal en de ligging der reële wortels van de vergelijking

$$f_0(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 8 = 0.$$

Kies

$$f_1(x) = 3x^2 - 10x + 8 \quad \text{en} \quad f_2(x) = x + 16.$$

In elk interval, dat het getal -16 niet bevat, verandert $f_2(x)$ niet van teken en is dus het verlies in het aantal tekenvariatiën juist gelijk aan het aantal nulpunten van $f_0(x)$ in dat interval. Intervallen, die het punt -16 bevatten, behoeven wij niet te onderzoeken, daar $f_0(x)$ geen wortels < -16 bevat. Verder blijkt, dat de vergelijking 2 niet-bestaansbare wortels heeft en 1 reële, gelegen tussen 3 en 4.

Opg. 3. Onderzoek de ligging van de wortels der vergelijking

$$x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x - 1 = 0.$$

Hierbij is

$$f_2(x) = 27x^4 + 34x^2 + 11$$

definiet, zodat we bij $f_2(x)$ onze rij afbreken. We vinden dan 1 positieve, 1 negatieve en 4 niet-reële wortels.

Opg. 4. De vergelijking

$$x^3 + px + q = 0 \quad (p \neq 0),$$

heeft twee niet-reële wortels, als $27q^2 + 4p^3 > 0$, en drie reële wortels, als $27q^2 + 4p^3 < 0$.

Men merke op, dat voor $p > 0$ de afgeleide van het linkerlid ook positief is, zodat de vergelijking dan slechts 1 bestaanbare wortel bezit. Het onderzoek behoeft dus alleen voor negatieve p te worden gedaan.

In het geval het aantal nulpunten, gelegen in een gegeven interval, gevraagd wordt bij een veelterm met een of meer meervoudige nulpunten, bepaalt men de GGD $D(x)$ van $f(x)$ en $f'(x)$. Dan is $\frac{f(x)}{D(x)}$ een veelterm $g(x)$ van lagere graad dan $f(x)$, die dezelfde wortels als $f(x)$ bezit, maar alle met multipliciteit 1; immers is ξ een nulpunt van $f(x)$ met multipliciteit m , dan is ξ een nulpunt van $f'(x)$ (dus ook van $D(x)$ met multipliciteit $m-1$, zodat ξ een enkelvoudig nulpunt van $\frac{f(x)}{D(x)}$ is. Men kan dus het theorema van Sturm op $g(x)$ i.p.v. $f(x)$ toepassen en vindt dan in elk interval het juiste aantal der nulpunten van $g(x)$, dus ook van $f(x)$, waarbij echter alle nulpunten slechts enkelvoudig geteld worden.

§ 4. Benadering van bestaanbare wortels.

Indien een veelterm $f(x)$ met bestaanbare coëfficiënten in twee verschillende punten a en b tegengesteld teken aanneemt, dan volgt uit continuïteitsoverwegingen, dat die veelterm tussen a en b minstens eenmaal de waarde nul aanneemt (zie Elan stelling (3,10) blz. 18). Uit deze stelling volgt:

De veelterm heeft tussen twee opeenvolgende nulpunten een vast teken. Tussen twee punten a en b , waar de veelterm $f(x)$ tegengesteld teken aanneemt, ligt een oneven aantal nulpunten van die veelterm, waarbij elk nulpunt even vaak wordt geteld als de multipliciteit bedraagt.

Tussen 2 punten a en b , waar de veelterm $f(x)$ eenzelfde teken bezit, ligt een even aantal nulpunten van de veelterm, waarbij elk nulpunt even vaak geteld wordt als de multipliciteit bedraagt.

Men merke op, dat in dit laatste geval het aantal nulpunten gelijk aan nul kan zijn.

Stel in het bewijs $a < b$. Stel $\xi_1, \dots, \xi_m$ zijn de naar opklimmende grootte gerangschikte tussen a en b gelegen nulpunten van de veelterm $f(x)$ met multipliciteiten $k_1, \dots, k_m$. Indien $f(a) > 0$, dan blijft de veelterm positief tussen a en ξ_1 . Omdat ξ_1 een nulpunt is met multipliciteit k_1 , heeft $f(x)$ tussen ξ_1 en ξ_2 hetzelfde teken als $(-1)^{k_1}$. Die veelterm heeft tussen ξ_2 en ξ_3 hetzelfde teken als $(-1)^{k_1+k_2}$.

Zo doorgaande vinden we, dat $f(x)$ tussen ξ_m en b en ook in het punt b zelf, hetzelfde teken heeft als $(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_m}$. Is de som $k_1+\dots+k_m$ der multipliciteiten even, dan bezitten $f(a)$ en $f(b)$ hetzelfde teken. Is daarentegen de som der multipliciteiten oneven, dan bezitten $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken.

Op dezelfde manier wordt het bewijs geleverd, als $f(a) < 0$ is, want dan behoeft men slechts $f(x)$ door $-f(x)$ te vervangen.

Theorema van Rolle (zie Elan stelling (4,20), blz. 35): Indien een functie $f(x)$ in een interval $a \leq x \leq b$, waarbij $a < b$ verondersteld wordt, continu is, in de uiteinden van het interval de waarde nul aanneemt en in het inwendige van het interval differentieerbaar is, dan is $f'(x)$ in minstens één punt tussen a en b gelijk aan nul.

Zij ξ een bestaanbare wortel van de vergelijking $f(x) = 0$ van de n^e graad. De coëfficiënten van die vergelijking worden bestaanbaar verondersteld. Zij a verder een willekeurig bestaanbaar getal. Wordt $\xi = a+h$ gesteld, dan krijgt men

$$0 = f(\xi) = f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Indien a dicht bij ξ ligt, ligt h dicht bij nul, zodat dan de termen met de factoren $h^2, \dots, h^n$ soms ten opzichte van h kunnen worden verwaarloosd, zonder dat daarbij grote fouten optreden. Als eerste benadering vinden we dan $f(a) + hf'(a) = 0$, dus $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$ (Formule van Newton).

Uit het voorafgaande volgt volstrekt niet, dat deze waarde a_1 werkelijk dicht bij een wortel van de vergelijking ligt, zelfs niet als a dicht bij zo'n wortel ligt. Trouwens het begrip "dicht bij" is een onnauwkeurig begrip. Bij de vergelijking $x^2 = 10^{-6}$ ligt $a = 10^{-6}$ dicht bij het nulpunt 10^{-3} , maar $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 10}$ ligt helemaal niet in de buurt. Bij de toepassing van de formule van Newton moet dus voorzichtigheid worden betracht. Die formule is zinloos, als $f'(a) = 0$ is, maar ze is in de regel onbruikbaar, als $f'(a)$ dicht bij nul ligt.

In de wiskunde passen we vaak het proces van iteratie toe. Uitgaande van het getal a en $f'(a) \neq 0$ veronderstellend hebben we een getal $a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ geconstrueerd. Wij herhalen (itereren) dit proces met a_1 i.p.v. a , waarbij we dan natuurlijk verplicht zijn $f'(a_1) \neq 0$ te veronderstellen. Aldus vinden we

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Zo voortgaande krijgt men onder bepaalde veronderstellingen (n.l. dat alle optredende noemers $\neq 0$ zijn) een rij van getallen $a_1, a_2, \dots$, die in vele gevallen snel tot de gezochte wortel ξ naderen. Breken we de rij op een geschikte plaats af, dan kunnen we in dat geval ξ met iedere van te voren voorgeschreven nauwkeurigheid berekenen.

Om dit proces meetkundig toe te lichten, beschouwen wij een recht-hoekig assenstelsel en tekenen wij de grafiek $y = f(x)$ van de functie $f(x)$. De nulpunten van de veelterm $f(x)$ worden aangegeven door de abscissen der snijpunten van deze grafiek met de X-as.

Opg. 1. Trek in een op de grafiek gelegen punt P met abscis a de raaklijn aan de kromme. Deze raaklijn snijdt, indien ze niet evenwijdig met de X-as loopt, de X-as in een punt met abscis $a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Stel de veelterm $f(x)$ bezit in twee verschillende punten a en b tegengesteld teken en tussen a en b is $f''(x)$ steeds ≥ 0 of steeds ≤ 0 . Dan bezit $f(x)$ tussen a en b één en slechts één nulpunt.

Dat er minstens één nulpunt is, is evident. Was er meer dan één nulpunt, dan waren er tussen a en b minstens 3, omdat $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken bezitten. Indien die 3 nulpunten 2 aan 2 verschillend zijn, vinden we volgens de stelling van Rolle twee verschillende punten, waar $f'(x) = 0$ is; omdat $f''(x)$ een vast teken heeft, is $f'(x)$ monotoon, zodat $f'(x)$ tussen die 2 punten identiek nul zou zijn. In dat geval is $f'(x)$ overal gelijk aan nul, zodat $f(x)$ een constante zou zijn in strijd met de veronderstelling, dat ze in a en b tegengesteld teken aanneemt. Nu blijft nog over te onderzoeken het geval, dat $f(x)$ tussen a en b twee verschillende nulpunten bezit, waarvan er minstens 1 een meervoudig nulpunt is. In dit laatste nulpunt is $f'(x)$ wederom nul, zodat we wederom tussen a en b twee verschillende punten zouden vinden, waarin $f'(x)$ de waarde nul zou aannemen. Dit is, zoals we hierboven gezien hebben, uitgesloten.

We weten dus nu, dat de veelterm $f(x)$ tussen a en b precies één nulpunt bezit. De vraag is, of dit nulpunt met willekeurig voorgeschreven nauwkeurigheid kan worden berekend met behulp van de benaderingsmethode van Newton.

Laten we eerst het geval beschouwen, dat $f(a)$ en $f'(a)$ hetzelfde teken bezitten. Het punt $a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ ligt dan, zoals we bewijzen zullen, tussen a en het gezochte nulpunt ξ en we zullen laten zien, dat in dat punt a_1 de veeltermen f en f'' wederom hetzelfde teken hebben. Dit proces met a_1 i.p.v. a herhalende, vinden we het tussen a_1 en ξ gelegen punt a_2 , waarin f en f'' wederom eenzelfde teken bezitten. Zo doorgaande vinden we een monotone rij getallen $a, a_1, a_2, \dots$. We gaan bewijzen, dat deze monotoon tot het gevraagde nulpunt ξ nadert.

Bezaten $f(a)$, $f'(a)$ en $f''(a)$ alle drie hetzelfde teken, dan zouden $f'(x)$ en ook $f(x)$ in het gehele interval $a \leq x \leq b$ dat teken bezitten, in strijd met de veronderstelling, dat $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken hebben. Dus $f(a)$ en $f'(a)$ bezitten tegengesteld teken, waaruit volgt, dat $a_1 > a$ is. Stelt men $\xi = a+h$, dan is

$$0 = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta h),$$

waarin $0 \leq \theta \leq 1$, dus

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} = h + \frac{1}{2}h^2 \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)} < h.$$

Hieruit volgt $\xi = a+h > a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1 > a$. De veelterm $f(x)$ heeft links van ξ , dus zeker in a_1 , hetzelfde teken als in a , zodat f en f'' in a_1 hetzelfde teken bezitten. De redenering met $a_1, a_2, \dots$ i.p.v. a herhalend, vinden we een monotoon toenemende rij $a, a_1, a_2, \dots$ gevormd door getallen, die alle kleiner dan ξ zijn. Die rij is convergent (zie E1an stelling (2,14) blz. 12). De limiet η van die rij is $\leq \xi$. Uit

$$(a_{n+1} - a_n) f'(a_n) = -f(a_n)$$

volgt bij limietovergang $f(\eta) = 0$, zodat η met het gevraagde nulpunt samenvalt.

Voor de berekening is het niet alleen van belang te weten, dat een limietproces tot het gevraagde antwoord voert, maar het is ook van gewicht te weten, of dit antwoord snel wordt benaderd. Immers, in de praktijk breken we na een eindig aantal stappen af en het is dan van belang te weten of het aldus gevonden antwoord een voldoende scherpe benadering levert. Dit onderzoek is hier zeer gemakkelijk. Immers wegens $f(\xi) = 0$ volgt uit de teruglopende betrekking

$$\xi - a_{n+1} = -\frac{1}{f'(a_n)} \left\{ f(\xi) - f(a_n) - f'(a_n)(\xi - a_n) \right\} = -\frac{1}{2} (\xi - a_n)^2 \frac{f''(\lambda)}{f'(a_n)},$$

waarbij λ tussen a_n en ξ ligt. Het blijkt dus, dat $\xi - a_{n+1}$ hoogstens van dezelfde orde van grootte is als $(\xi - a_n)^2$, tenminste als men bewijzen kan, dat de noemer $f'(a_n)$ niet dicht bij nul ligt. Dat die noemer inderdaad niet dicht bij nul ligt, kan als volgt worden ingezien. Eerst bewijzen wij, dat in het gehele interval $a \leq x \leq \xi$ de afgeleide $f'(x) \neq 0$ is. Bevatte dat interval een punt ζ met $f'(\zeta) = 0$, dan zou $f(x)$ in dat punt een minimale waarde of wel een maximale waarde aannemen, al naar gelang $f(a)$ positief of negatief zou zijn. In beide gevallen zou $f(\zeta)$ hetzelfde teken bezitten als $f(b)$, dus een teken tegengesteld aan dat van $f(a)$, hetgeen buitengesloten is, omdat a en ζ aan dezelfde kant van ξ liggen.

De afgeleide veelterm $f'(x)$, die in het interval $a \leq x \leq \xi$ niet nul is, bezit een positieve ondergrens. De breuk $-\frac{1}{2} \frac{f''(\lambda)}{f'(a_n)}$ is derhalve begrensd, waarmede bewezen is, dat $\xi - a_{n+1}$ hoogstens van dezelfde orde is als $(\xi - a_n)^2$. Dus als $\xi - a_n$ ongeveer van de orde 10^{-3} is, is $\xi - a_{n+1}$ ongeveer van de orde 10^{-6} , terwijl dan $\xi - a_{n+2}$ ongeveer van dezelfde orde is als 10^{-12} . Hieruit blijkt, dat $\xi - a_n$ zeer snel tot nul nadert, zodat we in de praktijk mogen verwachten, dat we reeds een bruikbaar antwoord vinden, indien we na een paar passen afbreken.

In het geval, $f(a) < 0$ en dus $f(b) > 0$ is, kan het bovenstaande proces met b i.p.v. a worden toegepast. Wij krijgen dan een rij monotoon afnemende getallen, die snel tot het gevraagde nulpunt ξ naderen.

Als toepassing berekenen wij in een aantal decimalen $\sqrt{m}$, waarbij m een natuurlijk getal is, dat geen volkomen vierkant is. Het gezochte getal is de positieve wortel van de vergelijking

$$f(x) = x^2 - m = 0.$$

Hier is $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Als eerste approximatie nemen wij een getal a_0 , waar $f(x)$ en $f''(x)$ hetzelfde teken hebben, d.w.z. waarvoor $f(a_0) > 0$ is. Men kan b.v. nemen $a_0 = m$, maar vaak kan men voor a_0 een kleinere waarde kiezen. De rij getallen $a_0, a_1, \dots$ wordt dan gedefinieerd door

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^2 - m}{2a_n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{m}{2a_n}.$$

B.v. als $m = 2$ is, neme men $a_0 = 2$, dan is

$$a_1 = \frac{3}{2}; \quad a_2 = \frac{17}{12}; \quad a_3 = \frac{577}{408} = 1,414211\dots,$$

terwijl $\sqrt{2} = 1,4142136$.

Opg. 2. Bewijs dat bij positieve m en gehele n men voor het bepalen van $x = m^{\frac{1}{n}}$ het iteratie schema

$$a_{h+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_h + \frac{m}{na_h^{n-1}}$$

kan nemen.

Opg. 3. Pas dit toe om $\frac{1}{m}$ te berekenen. Neem als bijzonder geval $m = 3$, $a_0 = \frac{1}{2}$ en approximeer dus het getal $\frac{1}{3}$ door een oneindig voortlopende tweedelige breuk.

De hier behandelde benaderingsmethode van Newton komt in feite daarop neer, dat een gedeelte van de grafiek van de functie $f(x)$ bij eerste benadering door een raaklijn is vervangen.

We gaan nu een regel afleiden, de z.g. regula falsi, die berust op het feit, dat in vele gevallen een boog van de genoemde grafiek bij benadering door de corresponderende koorde kan worden vervangen. Indien n.l. de veelterm $f(x)$ in twee verschillende punten a en b tegengesteld teken bezit, dan kunnen we de boog tussen de twee punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ vervangen door de koorde, die deze twee punten verbindt en die tot vergelijking heeft $\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$. Deze koorde snijdt de X -as in een punt met de abscis $x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$. In vele gevallen is deze waarde van x een approximatieve waarde van het gezochte nulpunt van de veelterm $f(x)$.

Om onze gedachten te bepalen, zullen we eerst het geval behandelen, dat in het gehele interval $a \leq x \leq b$ de tweede afgeleide $f''(x)$ steeds ≥ 0 is. In dat geval ligt de beschouwde boog van de kromme beneden de corresponderende koorde voor zover deze daar niet mee samenvalt. Immers de verticaal met abscis x snijdt de kromme en de koorde in twee punten, wier coördinatenverschil gelijk is aan

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) &= \frac{1}{b-a} \left\{ (x-b)(f(a)-f(x)) + (a-x)(f(b)-f(x)) \right\} = \\ &= -\frac{1}{b-a} \left\{ (b-x)(a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)(a-x)^2 f''(\xi') + (x-a)(b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(x-a)(b-x)^2 f''(\xi'') \right\} = \\ &= -\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \left\{ (x-a)f''(\xi') + (b-x)f''(\xi'') \right\} \leq 0, \end{aligned}$$

waarbij ξ' en ξ'' geschikt gekozen punten voorstellen tussen a en b .

Laten we nu eerst het geval behandelen, dat $f(a) < 0$, dus $f(b) > 0$. Dan ligt het snijpunt x_1 van de koorde met de X -as tussen a en ξ , zodat de veelterm $f(x)$ ook in het punt x_1 weer negatief is. De redenering met x_1 en b herhalende i.p.v. a en b , vinden we een punt x_2 , gelegen tussen x_1 en ξ . Zo doorgaande krijgen we een monotoon toenemende rij getallen $a, x_1, x_2, \dots$, alle $< \xi$. Deze rij is convergent. Haar limiet ω is $\leq \xi$. Om te bewijzen, dat ω met ξ samenvalt, beschouwen we, evenals hierboven de teruglopende betrekking, die hier de gedaante

$$x_h f(b) - b f(x_h) = \left\{ f(b) - f(x_h) \right\} x_{h+1}$$

bezit. Dit levert bij grensovergang $\omega f(b) - bf(\omega) = \{f(b) - f(\omega)\}\omega$, waaruit volgt $f(\omega) = 0$, dus $\omega = \xi$.

Als $f''(x)$ in het interval $a \leq x \leq b$ voortdurend ≥ 0 is (en ook als die tweede afgeleide in het interval voortdurend ≤ 0 is), levert de regula falsi het tusschen a en b gelegen nulpunt van $f(x)$ met iedere willekeurig voorgeschreven nauwkeurigheid, tenminste als $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken bezitten. Dit hebben we hierboven bewezen als $f(a)$ en $f''(x)$ tegengesteld teken bezitten (is n.l. $f(a) > 0$ en $f''(x) \leq 0$, dan behoeven we in het bovenstaande slechts $f(x)$ door $-f(x)$ te vervangen). Hebben $f(a)$ en $f''(x)$ hetzelfde teken, dan moeten we in het bovenstaande a en b verwisselen, zodat we dan een afnemende rij getallen $b, x_1, x_2, \dots$ krijgen, die tot het gevraagde nulpunt ξ naderen.

We zullen niet de convergentiesnelheid van dit proces onderzoeken. Bij nader onderzoek zou blijken, dat die snelheid veel geringer is dan bij de benaderingsmethode van Newton. Het blijkt n.l. dat bij de regula falsi $\xi - x_{n+1}$ niet van dezelfde orde is als $(\xi - x_n)^2$, maar van dezelfde orde als $\xi - x_n$, zodat de approximatie veel langzamer geschiedt.

In de practijk worden niet zo zeer de benaderingsmethode van Newton en de regula falsi gebruikt, als wel de rekenwijze van Horner, die hier aan een speciaal geval zal worden toegelicht.

Beschouw de vergelijking

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 77x - 10077 = 0.$$

Het linkerlid is negatief voor $x = 10$ en positief voor $x = 11$. Uit het vervolg blijkt dat de vergelijking tussen 10 en 11 slechts een enkel nulpunt bezit. Indien gevraagd wordt, dit nulpunt in 6 decimalen achter de komma te berekenen, ontwikkelen we $f(x)$ met de rekenwijze van Horner naar opklimmende machten van $y = x - 10$. Men krijgt het schema

1	-4	3	77	-10077
	10	60	630	7070
1	6	63	707	-3007
	10	160	2230	
1	16	223	2937	
	10	260		
1	26	483		
	10			
1	36			

dus

$$f(x) = y^4 + 36y^3 + 483y^2 + 2937y - 3007.$$

Gevraagd wordt van deze vergelijking de tussen 0 en 1 gelegen wortel y in zes decimalen nauwkeurig te berekenen. Zouden we $y = 0,9$ proberen, dan zou blijken, dat deze waarde te groot is, zodat we gaan ontwikkelen naar opklimmende machten van $z = y - 0,8$.

1	36	483	2937	-3007
	0,8	29,44	409,952	2677,5616
1	36,8	512,44	3346,952	-329,4384
	0,8	30,08	434,016	
1	37,6	542,52	3780,968	
	0,8	30,72		
1	38,4	573,24		
	0,8			
1	39,2			

Dus

$$f(x) = z^4 + 39,2z^3 + 573,24z^2 + 3780,968z - 329,4384.$$

Gevraagd het tussen 0 en 0,1 gelegen nulpunt van deze veelterm te bepalen. Voor een zodanige waarde van z zijn de eerste drie in het rechterlid optredende termen klein t.o.v. de beide andere termen, zodat men z bij benadering vindt door de som van deze laatste twee termen gelijk aan 0 te stellen. We vinden dat dat z approximatief gelijk is aan 0,08, zodat we gaan ontwikkelen naar opklimmende machten van $u = z - 0,08$. Om niet te veel decimalen te krijgen, ronden we af.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 39,2 \quad 573,24 \quad 3780,968 \quad -329,4384 \\
 \quad 0,1 \quad 3,14 \quad 46,110 \quad 306,1662 \\
 \hline
 1 \quad 39,3 \quad 576,38 \quad 3827,078 \quad -23,2722 \\
 \quad 0,1 \quad 3,15 \quad 46,36 \\
 \hline
 1 \quad 39,4 \quad 579,53 \quad 3873,44 \\
 \quad 0,1 \quad 3,16 \\
 \hline
 1 \quad 39,5 \quad 583 \\
 \quad 0,1 \\
 \hline
 1 \quad 39,6
 \end{array}$$

De veelterm $f(x)$ gaat dus bij grote benadering over in

$$u^4 + 39,6u^3 + 583u^2 + 3873,44u - 23,2722.$$

Het tussen 0 en 0,01 gelegen nulpunt van deze veelterm is approximatief 0,006, zodat we ontwikkelen naar opklimmende machten van $v = u - 0,006$. We krijgen dan het schema

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 39,6 \quad 583 \quad 3873,44 \quad -23,2722 \\
 \quad \ddots \quad \ddots \quad 3,50 \quad 23,2616 \\
 \hline
 1 \quad 39,6 \quad 583 \quad 3876,94 \quad -0,0106 \\
 \quad \ddots \quad \ddots \quad 3,50 \\
 \hline
 1 \quad 39,6 \quad 583 \quad 3880,44 \\
 \quad \ddots \quad \ddots \\
 \hline
 1 \quad 39,6 \quad 583 \\
 \quad \ddots \\
 \hline
 1 \quad 39,6
 \end{array}$$

De veelterm $f(x)$ is dus bij grote benadering gelijk aan de veelterm

$$v^4 + 39,6v^3 + 583v^2 + 3880,44v - 0,0106.$$

Het tussen 0 en 0,001 gelegen nulpunt vindt men weer approximatief door de som van de laatste twee termen gelijk aan nul te stellen, waaruit volgt $v = 0,000027$, waarbij voor de laatste decimaal niet kan worden ingestaan.

We vinden dus als benaderde waarde van het tussen 10 en 11 gelegen nulpunt van $f(x)$ de waarde 10,886027.

Opmerking. De bepaling van u uit z geschiedde door $u = z - s$ te nemen, waarbij $s = \frac{329,4384}{3780,968}$ en deze laatste breuk is juist gelijk aan de uitdrukking $\frac{f'(z)}{f(z)}$, zodat de hier gevolgde rekenwijze van Horner in feite neerkomt op een op speciale wijze uitvoeren van de approximatiemethode van Newton.

§11. Determinanten. (Grondeigenschappen)

Wenst men de vergelijkingen

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$$

op te lossen, dan vindt men door de gebruikelijke methode van optellen en aftrekken

$$x = \frac{\beta c - b\gamma}{\beta a - b\alpha} \quad ; \quad y = \frac{\gamma a - c\alpha}{\beta a - b\alpha} \quad ,$$

mits $\beta a - b\alpha \neq 0$ is. De uitdrukking $\beta a - b\alpha$ speelt blijkbaar een belangrijke rol bij het stelsel (1).

Wenst men het stelsel

$$(2) \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ Ax + By + Cz = D \end{cases}$$

op te lossen, dan kan men weer zijn toevlucht nemen tot de methode van optellen en aftrekken en vindt o.a.

$$(3) \quad x = \frac{d\beta\gamma - d\beta\gamma + \delta Bc - \delta bC + Db\gamma - D\beta c}{a\beta\gamma - a\beta\gamma + \alpha Bc - \alpha bC + Ab\gamma - A\beta c} \quad .$$

De noemer van deze breuk is voor het stelsel (2) van dezelfde betekenis als de vorm $\beta a - b\alpha$ voor het stelsel (1). Tevens merken we op, dat zowel bij de oplossing x van stelsel (1) als bij die van stelsel (2) de teller een analoge structuur heeft als de noemer. Voor uitdrukkingen als deze gaan wij nu een andere schrijfwijze invoeren.

Beperken wij ons eerst tot het stelsel (1), dan schrijven we de gevonden waarden van x en y eenvoudiger door het symbool $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ in te voeren. Dit noemen wij een determinant van de tweede orde. We kenner er de waarde $ps - qr$ aan toe, zodat de oplossingen van stelsel (1) luiden

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} \quad .$$

Voor de voor (1) belangrijke uitdrukking $a\beta - b\alpha$ hebben we dus nu de schrijfwijze $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ ingevoerd.

Op analoge wijze voeren wij in het symbool $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix}$, waarvan de betekenis is de uitdrukking, die in noemer van (3) staat. Bijgevolg is de oplossing x van het stelsel (2) te schrijven in de gedaante

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ \delta & \beta & \gamma \\ D & B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix}} \quad .$$

De nieuw ingevoerde symbolen noemen wij determinanten. Wij geven thans algemeen de definitie van determinant van de n^e orde. Hieronder verstaan

wij het symbool

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ kortweg geschreven } |a_{rs}|,$$

bestaande uit n rijen en n kolommen van getallen, die men de n^2 elementen van de determinant noemt. Aan dit symbool zullen wij een bepaalde waarde toekennen, zodanig dat die voor $n = 2$ en voor $n = 3$ overeenstemt met de hierboven gegevene. Die waarde is

$$\sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

waarbij de som wordt uitgestrekt over alle permutaties $i_1 i_2 \dots i_n$ der getallen $1, 2, \dots, n$. Bij de even permutaties moet het $+$ teken en bij de oneven permutaties het $-$ teken worden genomen. Daar er $n!$ permutaties der getallen $1, 2, \dots, n$ zijn, bestaat onze som uit $n!$ termen.

Men kan de definitie van determinant ook anders formuleren. Een determinant van de n^e orde heeft een waarde die de som is van $n!$ termen. Elke term is eventueel afgezien van het teken gelijk aan het product van n elementen der determinant, waarvan er geen twee in dezelfde rij en ook geen twee in dezelfde kolom staan.

Voorbeeld. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2}.$

Er zijn $2! = 2$ termen, resp. behorende bij de even permutatie 12 en de oneven permutatie 21 van de getallen 1 en 2. Dus de beschouwde determinant is gelijk aan $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ analoog aan het hierboven gewenste resultaat. Dit geldt ook voor determinanten van de 3^e orde (ga dit na; vergelijk opg.1).

Opg.1. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Sarrus gaf een regel aan om direct een determinant van de 3^e orde te berekenen. Hij schreef n.l. het volgende getallenschema op

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

en vormde er de 6 door lijnen aangegeven producten uit. De drie producten in de richting $a_{11} a_{22} a_{33}$ krijgen elk het $+$ teken, de andere drie het $-$ teken. De som der 6 zo gevonden producten is juist de waarde van de determinant (Regel van Sarrus).

Opg.2. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Opg.3. Bereken

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

Opg.4. Bereken

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

(- 360).

Beschouwt men een willekeurige term $a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_n s_n}$ uit de ontwikkeling van de determinant van de n^e orde $|a_{rs}|$, dan is het om het teken van deze term te bepalen, niet nodig de factoren zo te rangschikken, dat de eerste indices resp. 1, 2, ..., n worden. Wij bewijzen n.l. dat het teken in deze term gelijk is aan de som van het aantal inversies van de indices r en het aantal inversies van de indices s . Hiertoe verwisselen wij eens in het beschouwde product twee factoren $a_{r_\nu s_\nu}$ en $a_{r_\mu s_\mu}$. Hierdoor verandert het aantal inversies in de indices r en ook in de indices s met een oneven bedrag (verg. de stelling van §3, blz.14) hun som dus met een even bedrag. Door nu net zo lang factoren te verwisselen totdat de volgorde der eerste indices gelijk geworden is aan 1, 2, ..., n, is de som der aantallen inversies van de indices r en van de indices s met een even bedrag veranderd. Daar in het nieuw opgeschreven product de indices r geen inversies bezitten, is dus het aantal inversies in de indices s daarom (afgezien van een even getal) gelijk aan de som der aantallen inversies in de indices r en de indices s in het oorspronkelijk product, zodat deze som het teken bepaalt van dit product in de berekening van de waarde der determinant.

Voorbeeld: De term $a_{21} a_{44} a_{32} a_{13}$ heeft in de eerste indices de inversies (2,1), (4,3), (4,1), (3,1) en in de tweede indices de inversies (4,2), (4,3), het totale aantal is dus 6. Zou men de factoren rangschikken naar de eerste index dan vindt men $a_{13} a_{21} a_{32} a_{44}$, waarin de tweede indices de inversies (3,1), (3,2) bezitten, dus een even aantal minder dan 6.

In een willekeurige term der uitgewerkte determinant van de n° orde is het teken dus $(-)^{R+S}$, waarin R en S resp. de aantallen inversies in de indices $r_1, \dots, r_n$ en $s_1, \dots, s_n$ voorstellen. Het is duidelijk dat hieruit volgt, dat een determinant niet van waarde verandert, als men haar om de

hoofddiagonaal (dit is de verbindingsrechte van de elementen $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$) laat wentelen (d.w.z. elk tweetal elementen a_{rs} en a_{sr} verwisselt). Immers hierna ontstaat een determinant die alle termen van de oorspronkelijke bevat en wel met een teken $(-)^{S+R}$, dus met hetzelfde teken als de oorspronkelijke determinant. Zo is dus $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. Bij wenteling om de hoofddiagonaal blijven de elementen daarvan natuurlijk op hun plaats.

Definitie: Een determinant heet symmetrisch als zij door wenteling om de hoofddiagonaal in zichzelf overgaat, dus als $a_{rs} = a_{sr}$ voor alle combinaties (r,s) met $r = 1, 2, \dots, n$ en $s = 1, 2, \dots, n$. Zo is dus $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ symmetrisch, maar $\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ niet.

Een determinant heet scheef symmetrisch als voor elk paar (r,s) geldt $a_{rs} = -a_{sr}$.

Opg.5. Laat zien dat de determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ in het algemeen niet scheef-symmetrisch is.

Opg.6. Bereken de waarde van de scheef-symmetrische determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 9 \\ -3 & -9 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & e & d \\ -b & -e & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Stelling. Een scheef-symmetrische determinant van oneven orde is nul.

Bewijs: Daar de determinant bij wentelen om de hoofddiagonaal haar waarde behoudt, heeft men voor haar waarde D

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1,n-1} & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

In de laatste determinant heeft elk element een teken dat tegengesteld is aan dat van het overeenkomstige element in de oorspronkelijke determinant; elk der optredende termen in de laatste determinant is dan gelijk aan de overeenkomstige in de oorspronkelijke, afgezien van n factoren -1 , dus de nieuwe determinant is gelijk aan $(-)^n D$. We weten echter dat zij gelijk is aan D , dus $D = (-)^n D$. Daar n oneven ondersteld was, heeft men $D = -D$, dus $2D = 0$, dus $D = 0$.

In het voorgaande hebben wij gebruik gemaakt van het feit, dat als men alle elementen van een determinant met -1 vermenigvuldigt, de waarde der determinant met $(-)^n$ wordt vermenigvuldigd. Geheel analoog geldt: Vermenigvuldigt men elk element van een determinant met c , dan wordt de waarde ervan met c^n vermenigvuldigd (bewijs dit).

Opg.7. Hoe verandert de waarde van een determinant, als men elk element van één bepaalde rij met c vermenigvuldigt?

Opg.8. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & 6a & 3b \\ -a & 0 & c \\ -b & -2c & 0 \end{vmatrix}.$$

Wij gaan thans na hoe de waarde van een determinant verandert, als men twee rijen verwisselt. Beschouw dus de determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{en } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Het is duidelijk dat een willekeurige term $a_{1s_1} \dots a_{ps_p} \dots a_{qs_q} \dots a_{ns_n}$ van D_1 ook in D_2 optreedt en omgekeerd. Het teken dezer term in D_1 is $(-)^S$ waarin S het aantal inversies in de indices $s_1 \dots s_p \dots s_q \dots s_n$ aangeeft. De beschouwde term treedt ook in D_2 op. Wij geven tijdelijk $a_{q1}, \dots, a_{qn}$ aan resp. door $b_{p1}, \dots, b_{pn}$ en $a_{p1}, \dots, a_{pn}$ door $b_{q1}, \dots, b_{qn}$. Onze term treedt dan in D_2 op als $a_{1s_1} \dots b_{qs_p} \dots b_{ps_1} \dots a_{ns_n}$. Het aantal inversies hierin is de som der aantallen inversies in de 1^e en 2^e indices. De 1^e indices zijn $1, 2, \dots, p-1, q, p+1, \dots, q-1, p, q+1, \dots, n$, dus na 1 ruiling $1, 2, \dots, p-1, p, p+1, \dots, q-1, q, q+1, \dots, n$. De 2^e indices zijn $s_1, \dots, s_p, s_p, s_{p+1}, \dots, s_{q-1}, s_q, s_{q+1}, \dots, s_n$ en bevatten dus S inversies. De beschouwde term in D_2 wordt dus voorzien van het teken $(-)^{S+1}$. Iedere term in D_2 is derhalve tegengesteld aan de corresponderende term in D_1 , dus $D_1 = -D_2$.

We vinden zo dus de zeer belangrijke

Stelling: Verwisselt men twee rijen van een determinant dan verandert deze van teken en natuurlijk ook: verwisselt men twee kolommen van een determinant, dan verandert deze van teken.

Toepassing. Heeft een determinant twee gelijke rijen, dan verandert die determinant (dus ook de waarde D ervan) niet, als men deze verwisselt. Anderzijds gaat volgens de zojuist gevonden stelling bij die verwisseling de waarde D over in $-D$, dus men heeft $D = -D$, waaruit volgt $2D = 0$, dus $D = 0$. Dit levert de

Stelling: Een determinant met twee gelijke rijen (of met twee gelijke kolommen) is gelijk aan nul.

Zijn de elementen van een rij een vast veelvoud a van die van een andere rij van een determinant, dan vindt men dat de oorspronkelijke determinant een a keer zo grote waarde krijgt, als in die andere rij alle elementen met a worden vermenigvuldigd. Dan ontstaat echter een determinant met twee gelijke rijen, die volgens het bovenstaande nul is. De oorspronkelijke determinant is dus ook nul. (Geldt het resultaat ook als $a = 0$ is?).

Dit resultaat is nog iets anders te formuleren:

Stelling. Heeft een determinant twee evenredige rijen (of twee evenredige kolommen), dan is haar waarde nul.

Toepassing.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elk element van een determinant treedt in de eerste graad op in de uitdrukking, die de waarde van de determinant aangeeft. Van deze opmerking zullen we verschillende keren gebruik maken. Allereerst blijkt hieruit dat geldt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}+b_{r1} & \dots & a_{rn}+b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Gevolg: Telt men bij een rij van een determinant een veelvoud van een andere rij op, dan blijft de waarde ongewijzigd. Immers men heeft

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}+ta_{s1} & \dots & a_{rn}+ta_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ta_{s1} & \dots & ta_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In de laatste determinant luidt de r^e rij $ta_{s1} \dots ta_{sn}$, welke evenredig is met de elementen van de s^e rij $a_{s1} \dots a_{sn}$, dus de laatste determinant is nul, waaruit de bewering volgt.

Toepassing. Verifieer elk der volgende gelijkttekens bij de berekening van de determinant

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Men heeft

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6\frac{1}{2} & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6\frac{1}{2} & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} \\ = - (-6\frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot (-15) = -195.$$

Zo kan men bv. de determinant

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

als volgt herleiden

$$D = \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & a - b & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2 - c^2 & b - c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a-c & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c) .$$

De berekening van deze laatste determinant kan ook geheel anders geschieden. Men merke n.l. op, dat, als $a=b$ is, de determinant twee gelijke rijen heeft, dus nul is. De determinant is dan wegens de reststelling deelbaar door $a-b$. Evenzo ziet men, dat zij deelbaar is door $b-c$ en $a-c$. Dus

$$D = (a-b)(b-c)(a-c)f.$$

Daar D homogeen van de derde graad is in a , b , en c tezamen, moet de factor f een constante zijn. Bekijkt men de hoofddiagonaal van D dan ziet men dat in D een term a^2b optreedt. Deze treedt ook in het uitgewerkte product $(a-b)(b-c)(a-c)$ op dus $f = 1$.

Op analoge wijze vindt men

$$\begin{vmatrix} a^4 a^3 a^2 a & 1 \\ b^4 b^3 b^2 b & 1 \\ c^4 c^3 c^2 c & 1 \\ d^4 d^3 d^2 d & 1 \\ e^4 e^3 e^2 e & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e) \cdot (d-e).$$

(Van der Monde).

Opg.9. Bewijs

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Opg.10. Bereken

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad (-11).$$

Opg.11. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^3 & a & 1 \\ b^3 & b & 1 \\ c^3 & c & 1 \end{vmatrix} . \quad (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c).$$

Opg.12. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} .$$

Opg.13. Bereken de determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Opg.14. Los x op uit de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c & d \\ a & b+x & c & d \\ a & b & c+x & d \\ a & b & c & d+x \end{vmatrix} = 0.$$

Opg.15. Los x op uit

$$\begin{vmatrix} p & p & x \\ q & x & q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zoals wij reeds eerder opmerkten, treedt in de waarde der determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

het element a_{11} lineair op. Alle termen, die a_{11} bevatten zijn

van de gedaante

$$(-)^R a_{11} a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

waarin R het aantal inversies is dat optreedt in de rij 1, $r_2, r_3, \dots, r_n$ dus in de rij $r_2, r_3, \dots, r_n$. Merken wij op dat de som van de termen

$(-)^R a_{2r_2} a_{3r_3} \dots a_{nr_n}$ juist gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dan zien wij dat de factor van a_{11} juist die determinant is, die men krijgt door in de oorspronkelijke determinant de eerste rij en de eerste kolom te schrappen.

Schrapt men in een determinant $|a_{rs}|$ van de n^e orde de p^e rij en q^e kolom, dan ontstaat een nieuwe determinant van de $(n-1)^e$ orde, die men de onderdeterminant noemt van het element a_{pq} . Wij schrijven hiervoor m_{pq} . Wij vonden dus boven dat de factor van het element a_{11} in de ontwikkeling van de determinant $|a_{rs}|$ juist gelijk is aan m_{11} .

Wenst men de factor te vinden, waarmee een willekeurig element a_{pq} in de ontwikkeling van $|a_{rs}|$ optreedt, dan gaan wij eerst de p^e rij achtereenvolgens met de $(p-1)^e, (p-2)^e, \dots, 2^e, 1^e$ rij verwisselen en daarna de q^e kolom achtereenvolgens met de $(q-1)^e, (q-2)^e, \dots, 2^e, 1^e$ kolom. Er ontstaat dan een determinant, die $(-)^{p+q}$ maal zo groot is als de oorspronkelijke determinant. De nieuwe determinant heeft de gedaante

$$\begin{vmatrix}
 a_{pq} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{p-1,q} & a_{p+1,q} & \dots & a_{nq} \\
 a_{p1} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p-1,1} & a_{p+1,1} & \dots & a_{n1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{p,q-1} & a_{1,q-1} & a_{2,q-1} & \dots & a_{p-1,q-1} & a_{p+1,q-1} & \dots & a_{n,q-1} \\
 a_{p,q+1} & a_{1,q+1} & a_{2,q+1} & \dots & a_{p-1,q+1} & a_{p+1,q+1} & \dots & a_{n,q+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{pn} & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{p-1,n} & a_{p+1,n} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix},$$

dus hierin is op grond van het reeds afgeleide resultaat de factor van a_{pq} juist gelijk aan de onderdeterminant m_{pq} van het element a_{pq} in de oorspronkelijke determinant; in de oorspronkelijke determinant zelve is de coëfficiënt van a_{pq} dus gelijk aan $(-)^{p+q} m_{pq}$. We zullen de factor $(-)^{p+q} m_{pq}$ voortaan aanduiden met A_{pq} . Het getal A_{pq} noemt men de minor van het element a_{pq} .

Wenst men de determinant $|a_{rs}|$ te berekenen, dan merke men op dat in elke term precies één element van de p^e rij optreedt. Dus men heeft

$$|a_{rs}| = a_{p1}f_1 + a_{p2}f_2 + \dots + a_{pn}f_n,$$

terwijl wij nu weten, dat $f_1 = A_{p1}$, $f_2 = A_{p2}$, ..., $f_n = A_{pn}$, dus

$$|a_{rs}| = a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + \dots + a_{pn} A_{pn} = \sum_{v=1}^n a_{pv} A_{pv}.$$

Men noemt dit laatste resultaat de ontwikkeling van de determinant $|a_{rs}|$ naar de elementen van de p^e rij.

Toepassing.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{v=1}^3 a_{3v} A_{3v} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 88 = -90.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 5 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 6 & 17 \\ -1 & 3 & 6 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -27 & -49 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -11 \end{vmatrix}$$

$\xleftarrow{-3x} \quad \xrightarrow{+2x}$
 $\xrightarrow{3x} \quad \xrightarrow{6x}$

$$= -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -27 & -49 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 297 - 245 = 52.$$

Opg. 15. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Wij vonden hierboven dat voor de waarde A van de determinant $|a_{rs}|$ geldt

$$A = \sum_{m=1}^n a_{rm} A_{rm}.$$

Wij kunnen nu ook direct de waarde bepalen van de som die men krijgt als men de elementen van een rij met de minoren van een andere rij vermenigvuldigt en die producten optelt.

Immer men vindt dan $\sum_{m=1}^n a_{tm} A_{rm}$ en deze som is gelijk aan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,n} \\ a_{t,1} & \dots & a_{t,n} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

In de laatste determinant zijn de r^e en t^e rij gelijk, dus deze is nul. Men heeft dus

$$\sum_{m=1}^n a_{tm} A_{rm} = \begin{cases} A, & \text{als } t = r \\ 0, & \text{als } t \neq r. \end{cases}$$

Van dit resultaat zullen we later nog vaak gebruik maken.

Soms is een determinant van bepaalde orde gemakkelijk te berekenen door deze over te voeren in een determinant van hogere orde, b.v.

$$D = \begin{vmatrix} a+x & b+2x & c+3x \\ a+y & b+2y & c+3y \\ a+z & b+2z & c+3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & a+x & b+2x & c+3x \\ 0 & a+y & b+2y & c+3y \\ 0 & a+z & b+2z & c+3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -1 & x & 2x & 3x \\ -1 & y & 2y & 3y \\ -1 & z & 2z & 3z \end{vmatrix}$$

en de laatste determinant blijkt bij ontwikkeling naar de elementen van de eerste rij de waarde nul te bezitten. Men noemt het verhogen van de orde van een determinant door toevoegen van nieuwe rijen en kolommen het randen van een determinant.

Opg.16. Bewijs

$$\begin{vmatrix} ac-b^2 & bd-e^2 \\ bd-c^2 & ce-d^2 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Opg.17. Beschouw een determinant $|a_{rs}|$ van de 3^e orde.

Bereken de waarde van $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$.

Opg.18. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

Opg.19. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a+b+c & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a & a+\frac{1}{2}b+c & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & a+b+\frac{1}{2}c \end{vmatrix}.$$

Opg.20. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^4 & 4a^3 & b^4 & 4b^3 & 12b \\ a^3 & 3a^2 & b^3 & 3b^2 & 6b \\ a^2 & 2a & b^2 & 2b & 2 \\ a & 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Opg.21. Bereken

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & -1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & -1 \end{vmatrix}, \text{ als } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Opg.22. Bereken

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & cda & dab & abc \end{vmatrix}.$$

Tenslotte definiëren wij nog het begrip matrix. Een matrix is een rechthoekig schema van m bij n getallen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad \text{kortweg } \|a_{rs}\|,$$

waaraan geen getalwaarde is toegekend. Het enige hier van belang zijnde begrip is de rang van een matrix. Hieronder verstaat men de orde van de "grootste" determinant (dit is de determinant van de hoogste orde), die in de matrix bevat is (dwz. wordt ontstaat door uit de matrix een aantal rijen en kolommen weg te laten - dit aantal kan soms nul zijn -) en die een van nul verschillende waarde bezit.

Zo bezit de matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{de rang 2, de matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{daarentegen de rang 3.}$$

Opg.23. Bepaal de rang der matrices

$$\|1 \ 3 \ 0 \ 2\|; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

§ 12. Stelsels lineaire vergelijkingen.

Wij gaan thans de in de vorige paragraaf behandelde eigenschappen van determinanten en matrices toepassen bij het oplossen van stelsels vergelijkingen.

Beschouw het stelsel

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Wij kunnen hiervan onmiddellijk de oplossing vinden in het geval dat de determinant $a = a_{rs} \neq 0$ is. In dat geval vermenigvuldige men nl. de 1^e verg. met A_{11} , de 2^e met A_{21} , ..., de n^e met A_{n1} (waarin wederom A_{rs} de minor van het element a_{rs} in de determinant $|a_{rs}|$ voorstelt), waarna men vindt:

$$ax_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Noemen wij de determinant, die uit a_{rs} ontstaat door daarin de s^e

kolom te vervangen door $b_1, b_2, \dots, b_n$, voortaan a_s , dan vindt men

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

$x_1 = \frac{a_1}{a}$ en op gelijke wijze $x_r = \frac{a_r}{a}$ ($r = 2, \dots, n$) (regel van Cramer).

Hiermede zijn de formules teruggevonden die in de gevallen $n = 2$ en $n = 3$ het uitgangspunt voor de theorie der determinanten waren.

Het is duidelijk dat in het geval, dat $a = 0$ is, op deze wijze geen oplossing wordt gevonden.

Omgekeerd voldoen de gevonden waarden van $x_1, \dots, x_n$ aan het gegeven stelsel vergelijkingen, deze zijn daarvan bovendien de enige oplossing. In het geval $a \neq 0$ heeft het gegeven stelsel dus één ondubbelzinnig bepaalde oplossing, gegeven door de regel van Cramer.

Opg. 1. Los op het stelsel

$$\begin{cases} 24x + 11y - 10z = 5 \\ 2x + 2y + 2z = 10 \\ 13x - 2y - 7z = -10 \end{cases}$$

Opg. 2. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{cases} \quad (a \neq b; b \neq c; c \neq a).$$

Het is de vraag of zo'n gevonden oplossing ook voldoet aan elk der overige $p - k$ vergelijkingen.

Beschouw daartoe de determinant $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & a_{ml} \end{vmatrix}$,

waarin m één der getallen $k + 1, \dots, p$ en l één der getallen $k + 1, \dots, q$ is. Daar elk dezer determinanten de orde $k + 1$ bezit en de matrix $\|a_{rs}\|$ de rang k bezit, is elk dezer determinanten nul. Duidt men de minoren der elementen $a_{1l}, \dots, a_{ml}$ in deze determinant weer aan door

$A_{1l}, \dots, A_{ml}$, dan heeft men

$$\sum a_{rs} A_{rl} = \begin{cases} 0 & \text{voor } s \neq l \\ D = 0 & \text{voor } s = l \end{cases}$$

zodat het linkerlid van de vergelijking

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mq}x_q = b_m$$

wegens $A_{ml} \neq 0$ een lineair compositum is van de linkerleden der eerste k vergelijkingen.

Hieruit volgt dat een gevonden oplossing der eerste k vergelijkingen dan en slechts dan ook aan de m^e ($m = k + 1, \dots, p$) vergelijking voldoet, als het rechterlid b_m dier vergelijking eenzelfde lineair compositum is van de rechterleden $b_1, \dots, b_k$ der eerste k vergelijkingen, dus als

$$\sum b_r A_{rl} = 0, \text{ dus } R_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & b_m \end{vmatrix} = 0$$

Wij zien dus dat het gegeven stelsel ∞^{q-k} oplossingen bezit, als elk der determinanten $R_{k+1}, \dots, R_p$ gelijk is aan nul en geen oplossing bezit, zodra één dier determinanten van nul verschilt. In het eerste geval noemt men de beschouwde vergelijkingen afhankelijk, in het tweede geval strijdig. Wij vatten de gevonden resultaten samen.

Bij het stelsel (II) van p lineaire vergelijkingen in q onbekenden, waar de rang der coëfficiënten matrix gelijk is aan k , heeft men de volgende gevallen.

- 1^o $k = p$; $q = k$. Er is één stel oplossingen.
- 2^o $k = p$; $q > k$. Er zijn ∞^{q-k} stellen oplossingen.
- 3^o $k < p$; $q = k$; $R_{k+1} = \dots = R_p = 0$. Er is één stel oplossingen.
- 4^o $k < p$; $q > k$; $R_{k+1} = \dots = R_p = 0$. Er zijn ∞^{q-k} stellen oplossingen.
- 5^o $k < p$; $q \geq k$; tenminste één der uitdrukkingen $R_{k+1}, \dots, R_p$ verschilt van nul. Er zijn geen oplossingen.

Wij kunnen de gevonden resultaten nog iets anders formuleren door naast de coëfficiënten matrix A ook te beschouwen de

$$\text{matrix B} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & b_p \end{vmatrix}.$$

In geval 1^o is de rang van A en B elk gelijk aan k.

In geval 2^o is dat eveneens het geval.

In geval 5^o is de rang van A gelijk aan k en die van B gelijk aan k+1.

Wij laten zien, dat in de gevallen 3^o en 4^o de rangen van A en B gelijk zijn. Was dit nl. niet zo, dan was de rang van B gelijk aan k+1, dus er bestond een determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \cdots & a_{r_1 s_k} & b_{r_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_{k+1} s_1} & \cdots & a_{r_{k+1} s_k} & b_{r_{k+1}} \end{vmatrix}$$

van de orde k+1, die van nul verschilde, d.w.z. op grond van een ontwikkeling naar de elementen der laatste kolom, waren niet alle onderdeterminanten hiervan, waarin de eerste k kolommen optreden, gelijk aan nul. Laat nu de onbekenden en vergelijkingen zo genummerd zijn, dat de onderdeterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ is.}$$

Daar $D \neq 0$ is, verkeert dan ons stelsel in geval 5^o en heeft dus geen oplossing, in strijd met de onderstelling, dat wij met geval 3^o of 4^o te maken hebben, en het stelsel wel een oplossing bezit.

Wij zien dus, dat het stelsel (II) dan en slechts dan tenminste één oplossing bezit, als de rangen der matrices A en B gelijk zijn. Dit resultaat is afkomstig van de mathematicus Capelli.

Hecht men voorts aan het symbool ∞^{q-k} voor het geval $q=k$ de waarde 1, dan kunnen de gevallen 1^o en 2^o en eveneens de gevallen 3^o en 4^o samen worden genomen.

Opg. 4. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ y + 2az = 3a^2 \end{cases}$$

Opg. 5. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z - u = 1 \\ x + y - z + u = 2 \\ x - y + z + u = 3 \\ ax + y + z + u = a^2 - a \end{cases}$$

die van de orde $k+1$ is, gelijk aan nul dus als wij de minoren hierin weer op de gebruikelijke wijze aangeven

$$\sum a_{rs} A_{r\ell} = 0, \text{ zowel voor } s = \ell \text{ als voor } s \neq \ell.$$

Dit houdt in wegens $A_{m\ell} \neq 0$, dat de m^e vergelijking van het stelsel (III) een linear compositum is van de eerste k , zodat ieder stel oplossingen van de eerste k vergelijkingen tevens voldoet aan de m^e vergelijking ($m = k+1, \dots, p$). Hiermede is het geval $p > k$; $q > k$ teruggebracht op het geval $p = k$; $q > k$.

Het is verder duidelijk dat men bij het oplossen der eerste k vergelijkingen de getallen $x_{k+1}, \dots, x_q$ willekeurig kan kiezen (echter niet allen gelijk aan nul) en dan, zoals in het voorafgaande is aangegeven, uit die vergelijkingen de onbekenden $x_1, \dots, x_k$ kan oplossen, d.w.z. lineair uitdrukken in de grootheden $x_{k+1}, \dots, x_q$. Men vindt dan niet $\mathbb{O}^{q-k}$, maar slechts $\mathbb{O}^{q-k-1}$ stellen oplossingen daar elk stel evenredig met een vast stel, tot eenzelfde oplossing aanleiding geeft.

Is $q = k+1$ dan vindt men juist één oplossing, die bepaald wordt door

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = -a_{1,k+1}x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k = -a_{k,k+1}x_{k+1} \end{cases}$$

$$\text{dus } x_1 = -x_{k+1} \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,k+1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \text{ enz.}$$

Stelt men:

$$x_{k+1} = (-)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{dit mag want wij mogen alle oplossingen} \\ x_1, \dots, x_q \text{ tegelijkertijd met een con-} \\ \text{stante, die van nul verschilt, vermenigvuldigen),} \end{array} \right)$$

dan vindt men:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k2} & \dots & a_{k,k+1} \end{vmatrix}; \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} & \dots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}a_{k3} & \dots & a_{k,k+1} \end{vmatrix}; \dots;$$

$$x_{k+1} = (-)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

De onbekenden zijn dus gelijk aan of evenredig met determinanten van de orde k , die men uit de matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k+1} \end{vmatrix}$$

verkrijgt, door daarin achtereenvolgens een kolom weg te laten en de zo verkregen determinanten op de juiste wijze van een + of - teken te voorzien. Men schrijft in dit geval wel kortweg

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_{k+1} \text{ OC } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k+1} \end{vmatrix}$$

(Het teken OC uit te spreken als "evenredig met de minoren van"),

$$\text{Bvb. het stelsel } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \text{ heeft de oplossing}$$

$$x:y:z \text{ OC } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4:8:-4 = +1:-2:1.$$

Het geval $p \geq k$; $q = k$ kan direct worden behandeld. Immers na geschikte nummering der onbekenden en vergelijkingen

$$\text{heeft men } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pk}x_k = 0. \end{cases}$$

Beschouw het stelsel der eerste k vergelijkingen van dit stelsel. Dit is een stelsel van k vergelijkingen met k onbekenden en rang der matrix = k , welk stelsel één en slechts één oplossing bezit, die men vindt met behulp van de regel van Cramer. Men ziet direct in, dat wegens het nul zijn van alle rechterleden, elk der onbekenden nul is, zodat de gevonden oplossing niet als oplossing van het homogene stelsel wordt aangemerkt.

Samenvattend zien wij dus dat p homogene lineaire vergelijkingen in q onbekenden, waarbij de rang der coëfficiëntenmatrix gelijk is aan k , geen oplossing bezit als $k = q$,

één oplossing bezit als $k = q - 1$.

$q-k-1$ oplossingen bezit als $k < q - 1$.

Opg. 7. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z - u = 0. \\ x + y - z + u = 0. \\ x - y + z + u = 0. \end{cases}$$

Opg. 8. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$$

§ 13. Verdere eigenschappen van determinanten.

In deze paragraaf leiden wij allereerst het theorema van Laplace af, dat ons een nieuwe methode geeft om de waarde van een determinant uit te rekenen. Dit theorema luidt als volgt:

Zij $A = |a_{rs}|$ een determinant van de n^e orde. Kies hieruit k vaste rijen $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$. Noem de overige rijen $r'_1, r'_2, \dots, r'_{n-k}$. Dan is

$$A = \sum_{s_1, \dots, s_k} (-1)^{r_1 + \dots + r_k + s_1 + \dots + s_k} \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \dots & a_{r_1 s_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r_k s_1} & \dots & a_{r_k s_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{r'_1 s'_1} & \dots & a_{r'_1 s'_{n-k}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r'_{n-k} s'_1} & \dots & a_{r'_{n-k} s'_{n-k}} \end{vmatrix}$$

Hierin wordt gesommeerd over alle combinaties der k getallen $s_1, \dots, s_k$ uit de getallen $1, \dots, n$. De overige der getallen $1, \dots, n$ worden $s'_1, \dots, s'_{n-k}$ genoemd. Wij onderstellen hierbij, dat de getallen $r_1, \dots, r_k$, de getallen $s_1, \dots, s_k$, de getallen $r'_1, \dots, r'_{n-k}$ en de getallen $s'_1, \dots, s'_{n-k}$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn.

Het is duidelijk, dat de aantallen termen na uitschrijven der determinanten in linker- en rechterlid gelijk zijn. Immers links zijn er $n!$ termen in de som rechts is gelijk aan het aantal combinaties van n , dus aan

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ en elk zo'n term bestaat na uitschrijven}$$

van der beide erin staande determinanten uit $k!(n-k)!$ termen, dus het rechterlid bevat inderdaad ook $n!$ termen.

Een willekeurige term rechts in de ontwikkeling der determinanten bestaat uit n factoren a_{rs} , waarin de indices r en ook de indices s een of andere permutatie zijn van de getallen $1, \dots, n$, zodat deze term in A ook optreedt en omgekeerd. Rest ons dus te verifiëren dat het teken in die term links en rechts in onze formule overeenstemt. Laat deze term de gedaante

$$a_{r_1 s_1} \dots a_{r_k s_k} a_{r'_1 s'_1} \dots a_{r'_{n-k} s'_{n-k}}$$

bezitten. Hierin is $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ een of andere permutatie der getallen $s_1, \dots, s_k$; $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{n-k}$ een of andere permutatie der getallen

$s'_1, \dots, s'_{n-k}$. Is σ het aantal inversies in de rij $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ en σ' dat in de rij $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{n-k}$ dan heeft deze term dus het teken

$(-1)^{r_1 + \dots + r_k + s_1 + \dots + s_k + \sigma + \sigma'}$. Is r het aantal inversies in de indices $r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_{n-k}$ en s dat in de indices $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma'_1, \dots, \sigma'_{n-k}$

dan heeft dezelfde term in het linkerlid het teken $(-1)^{r+s}$. Wij hebben dus te bewijzen dat het verschil $r_1 + \dots + r_k + s_1 + \dots + s_k + \sigma + \sigma' - r - s$ even is.

Hiertoe bepalen wij eerst het aantal inversies in de rij $r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_{n-k}$. Elk getal r_α is kleiner dan de opvolgende getallen r_β en elk getal r'_γ is kleiner dan de opvolgende getallen r'_δ . Er zijn dus alleen inversies mogelijk tussen getallen r_α en r'_γ . Daar r_1 het kleinste is der getallen $r_1, \dots, r_k$, zijn de getallen $r_1-1, r_2-1, \dots, 2, 1$ alle

begrepen in de groep $r_1', \dots, r_{n-k}'$, dus r_1 geeft aanleiding tot $r_1 - 1$ inversies. Het getal r_2 is het op één na kleinste der getallen in de groep $r_1, \dots, r_k$. De getallen $r_2 - 1, r_2 - 2, \dots, 1$ liggen dus allen afgezien van het ene getal r_1 in de groep $r_1', \dots, r_{n-k}'$. Derhalve geeft het getal r_2 aanleiding tot $r_2 - 2$ inversies. Op analoge wijze ziet men dat het getal r_k aanleiding geeft tot $r_k - k$ inversies. De getallen $r_1, \dots, r_k, r_1', \dots, r_{n-k}'$ geven dus aanleiding tot

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_k - 1 - 2 - \dots - k = r_1 + \dots + r_k - \frac{1}{2}k(k+1)$$

inversies. Derhalve is $r_1 + \dots + r_k - r = \frac{1}{2}k(k+1)$

Op analoge wijze bepalen wij het aantal s der inversies in de rij

$\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_1', \dots, \sigma_{n-k}'$. Na een aantal ruilingen kan men de getallen $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ in de volgorde $s_1, \dots, s_k$ brengen. Dit aantal is, afgezien van een even getal, gelijk aan σ . Na (afgezien van een even getal, σ' ruilingen is de rij $\sigma_1', \dots, \sigma_{n-k}'$ te brengen in de volgorde

$s_1', \dots, s_{n-k}'$. Het aantal inversies in de rij $s_1, \dots, s_k, s_1', \dots, s_{n-k}'$ blijkt op analoge wijze als hierboven gelijk te zijn aan

$$s_1 + \dots + s_k - 1 - 2 - \dots - k = s_1 + \dots + s_k - \frac{1}{2}k(k+1),$$

dus afgezien van een even getal heeft men

$$s = \sigma + \sigma' + s_1 + \dots + s_k - \frac{1}{2}k(k+1)$$

zodat men uiteindelijk, afgezien van een even getal, vindt

$$r_1 + \dots + r_k + s_1 + \dots + s_k + \sigma + \sigma' - r - s = k(k+1)$$

en deze uitdrukking is inderdaad even, want van elk paar opeenvolgende getallen k en $k+1$ is er juist één dat even is. Hiermee is de formule van Laplace aangetoond.

Opg. 1. Laat zien dat de ontwikkeling van een determinant naar de elementen van een bepaalde rij een bijzonder geval is van het theorema van Laplace.

Opg. 2. Bereken met behulp van het theorema van Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Opg. 3. Bereken met behulp van het theorema van Laplace de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Opg. 4. Bereken met behulp van het theorema van Laplace de waarde van

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Opg. 5. Zijn alle minoren van de tweede orde van een determinant gelijk aan nul, dan is die determinant zelf ook nul.

Wij maken thans gebruik van de ontwikkelingsregel van Laplace om een belangrijke stelling af te leiden over het product van twee determinanten.

Zijn $A = |a_{rs}|$ en $B = |b_{rs}|$ beide determinanten van de n^e orde, dan kan men hun product AB schrijven als een determinant $C = |c_{rs}|$, die eveneens van de n^e orde is. Men heeft nl. te nemen

$$c_{rs} = \sum_{m=1}^n a_{rm} b_{ms}.$$

Deze uitdrukking zullen wij noemen het inwendig product van de r^e rij van A en de s^e kolom van B .

Bewijs. Op grond van de ontwikkeling van Laplace ziet men direct in dat het product AB gelijk is aan

$$AB = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Vermenigvuldig de eerste kolom met b_{11} en tel die op bij de $(n+1)^e$ rij
 " " " " " b_{12} " " " " " " $(n+2)^e$,
 " " " " " b_{1n} " " " " " " $2n^e$.

Vermenigvuldig de tweede kolom met b_{21} en tel die op bij de $(n+1)^e$ rij
 " " " " " b_{22} " " " " " " $(n+2)^e$, enz;
 " " " " " b_{2n} " " " " " " $(2n)^e$.

I.h.a. Vermenigvuldig de 3^e kolom met b_{sr} en tel die op bij de $(n+r)^e$ rij, $(r, s=1, \dots, n)$.

Het is duidelijk dat hierdoor het rechterondervak van de determinant AB geheel uit nullen gaat bestaan. In het rechterbovenvak vinden we in de r^e rij en $(n+s)^e$ kolom de uitdrukking

$$\sum_{m=1}^n a_{rm} b_{ms}, \text{ dus juist } c_{rs}.$$

Ontwikkelt men de gevonden determinant volgens Laplace, dan vindt men

$$AB = (-1)^{1+2+\dots+n+(n+1)+\dots+(2n)} \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} |c_{rs}| = (-1)^{n(2n+1)+n} |c_{rs}| = |c_{rs}|,$$

waarmee de stelling bewezen is.

Natuurlijk kan men het product AB op meer dan een wijze als een determinant van de n^e orde schrijven. Zo kan men bv. eerst de determinant B om de hoofddiagonaal laten draaien en daarna de productstelling toepassen. Dan vindt men

$$c_{rs} = \sum_{m=1}^n a_{rm} b_{sm}$$

en ook zijn natuurlijk de formules

$$c_{rs} = \sum_{m=1}^n a_{mr} b_{ms} \quad \text{en} \quad c_{rs} = \sum_{m=1}^n a_{mr} b_{sm}$$

juist.

Opg. 6. Schrijf het product der determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

op de bovenaangegeven 4 wijzen als een determinant van de tweede orde.

Opg. 7. Door

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

op twee verschillende manieren te berekenen (rechtstreeks en met behulp van het gevonden theorema) bewijze men

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Wij bewijzen thans nog een aantal resultaten, waarbij het vermenigvuldigingstheorema gebruikt zal worden.

Beschouw bij de determinant $|a_{rs}|$ tevens de determinant $|A_{rs}|$ waarbij elk element de minor is van het corresponderende element $|a_{rs}|$ van de oorspronkelijke determinant. Men heeft

$$|a_{rs}| \cdot |A_{rs}| = |p_{rs}|.$$

We weten dat voor een willekeurig element p_{rs} van de product determinant geldt

$$\sum_{k=1}^n a_{rk} A_{sk} = \begin{cases} 0, & \text{als } r \neq s \\ a, & \text{als } r = s. \end{cases}$$

Hierin is a de waarde van de determinant $|a_{rs}|$. De determinant $|p_{rs}|$ heeft dus de gedaante

$$\begin{vmatrix} a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

derhalve de waarde a^n . Wij vinden derhalve

$$a |A_{rs}| = a^n.$$

Is $a \neq 0$, dan volgt hieruit $|A_{rs}| = a^{n-1}$. Ook als $a = 0$ is, geldt dit resultaat, hetgeen dan inhoudt dat $|A_{rs}| = 0$. Dit laatste tonen wij door op te merken, dat als een determinant gelijk is aan nul, voor viertal minoren

$$A_{rs}, A_{rt}, A_{us}, A_{ut} \quad \text{geldt} \quad A_{rs} : A_{rt} = A_{us} : A_{ut}.$$

Is dit bewezen, dan zijn in A_{rs} alle minoren van de 2^e orde gelijk nul, zodat wegens een Laplace ontwikkeling die determinant zelf nul is.

Wij tonen thans de gezochte evenredigheid aan. Door verwisseling van rijen en verwisseling van kolommen kunnen wij volstaan met het bewijzen van de relatie $A_{11}:A_{12} = A_{21}:A_{22}$. Volgens Laplace is

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

dus

$$A_{11} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{42} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Voert men de vermenigvuldiging uit, dan vindt men dat het laatste product gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

Evenzo $A_{12} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0$, derhalve

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}^2 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit volgt

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Wij vinden dus $|A_{rs}| = |a_{rs}|^{n-1}$

Er gelden ook dergelijke relaties tussen complementaire minoren van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$. Wij onderstellen in het volgende dat $|a_{rs}| \neq 0$ is. Beschouw bijv. de minor

$$M = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \text{in } A_{rs}$$

Men heeft, wederom gebruik makende van het vermenigvuldigingstheorema

$$Ma = \begin{vmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ A_{21} & & A_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dus

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Op analoge wijze vindt men een overeenkomstig resultaat voor willekeurige complementaire minoren van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$

Opg. 8. Bewijs op analoge wijze

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 14. Bijzondere determinanten.

Een determinant heet symmetrisch als voor alle indices r en s geldt $a_{rs} = a_{sr}$. Wij kunnen een symmetrische determinant D ook op andere wijze karakteriseren, nl. door de eis, dat de determinant D gelijk is aan zijn gespiegelde D' . Hierbij verstaat men onder de toegevoegde determinant D' van een determinant D die determinant, die uit D ontstaat door de determinant D om de hoofddiagonaal te wentelen, d.w.z. door elk element a_{rs} te vervangen door het element a_{sr} . Een determinant D is dus symmetrisch als D en D' overeenstemmen. Ook de waarden van D en D' stemmen dan overeen; dat is echter bij iedere determinant (ook bij niet-symmetrische determinanten) het geval.

Een determinant is scheefsymmetrisch als elk element a_{rs} het tegengestelde is van het element a_{sr} . Bij een scheefsymmetrische determinant D zijn dus alle elementen van D en D' tegengesteld. Hieruit volgt dat de waarde a van een scheefsymmetrische determinant voldoet aan $a = (-1)^n a$, waarin n de orde der determinant is. Is n oneven, dan volgt hieruit $a = 0$. Elke scheefsymmetrische determinant van oneven orde is dus gelijk aan nul.

Wij bewijzen thans dat een scheefsymmetrische determinant van even orde gelijk is aan een volkomen vierkant en wel aan het kwadraat van een veelterm in de elementen.

Voor $n = 2$, dus voor de scheefsymmetrische determinant $\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2$

is dit evident. Onderstel thans dat het even getal n groter is dan 2 en de stelling voor $n-2$ in plaats van n reeds bewezen is. Dan heeft men voor de waarde a van de scheefsymmetrische determinant $|a_{rs}|$ van de n^e orde de relatie, die wij in de vorige paragraaf vonden

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De minoren A_{11} en A_{22} zijn scheefsymmetrische determinanten van oneven orde, dus gelijk aan nul. Verder heeft men $A_{12} = -A_{21}$.

Opg. 1. Bewijs dit.

Bovenstaande relatie levert dus

$$A_{12}^2 = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

De tweede factor in het rechterlid is een scheefsymmetrische determinant van de orde $n-2$, dus wegens de inductieonderstelling, een volkomen vierkant. Dan is dat ook het geval met a .

Opg. 2. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

Opg. 3. Bewijs

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i,k=1}^3 u_i \cdot u_k A_{ik}.$$

Tot een ander bijzonder type determinanten behoren de circulaire determinanten. Bij deze is voor alle r en s $a_{r+1, s+1} = a_{r, s}$; de bedoeling is dat een index, die groter is dan n , met n verminderd wordt. Zo luidt de circulaire determinant van de derde orde

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Om deze te berekenen vermeerderen we de eerste rij met de tweede en de derde, waarna alle elementen der eerste rij, dus ook de determinant zelf, door $a+b+c$ deelbaar blijken te zijn. Vermeerdert men de eerste rij met ρx de tweede en met $\rho^2 x$ de derde rij (waarbij ρ een der complexe derdemachtswortels uit de eenheid is), dan blijkt uit het resultaat dat de determinant deelbaar is door $a + \rho^2 b + \rho c$, enz. Men vindt tenslotte, dat de beschouwde determinant gelijk is aan

$$(a+b+c) (a + \rho b + \rho^2 c) (a + \rho^2 b + \rho c).$$

Opg. 4. Bereken de waarde der circulaire determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \end{vmatrix}$$

Opg. 5. Bereken eveneens de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & c & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & c & a \end{vmatrix}$$

Tenslotte behandelen wij een zeer belangrijk type van determinanten, nl. de orthogonale determinanten.

Een determinant a_{rs} heet orthogonaal als geldt $a_{rs} = \frac{A_{rs}}{a}$.

Hierin stelt a weer de waarde der determinant $|a_{rs}|$ voor. Men heeft dan voor een orthogonale determinant

$$a = \sum_{s=1}^n a_{rs} A_{rs} = \sum_{s=1}^n a a_{rs}^2 = a \sum_{s=1}^n a_{rs}^2, \text{ dus } \sum_{s=1}^n a_{rs}^2 = 1$$

Verder is voor $r \neq t$

$$0 = \sum_{s=1}^n a_{rs} A_{ts} = \sum_{s=1}^n \frac{a_{rs} a_{ts}}{a}, \text{ dus } \sum_{s=1}^n a_{rs} a_{ts} = 0$$

Op geheel analoge wijze ziet men in

$$\sum_{r=1}^n a_{rs}^2 = 1; \quad \sum_{r=1}^n a_{rs} a_{rt} = 0,$$

als $s \neq t$.

Verder heeft men door toepassing van het vermenigvuldigings-theorema

$$a^2 = |a_{rs}| \cdot |a_{rs}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

dus $a = \pm 1$. Is $a = +1$, dan heet de determinant rechtstreeks orthogonaal, is $a = -1$ dan indirect orthogonaal. Bij een orthogonale determinant heeft men dus $a_{rs} = A_{rs}$ of $-A_{rs}$ al naar de determinant al of niet rechtstreeks orthogonaal is.

Opg. 6. Bewijs dat bij een orthogonale determinant $|a_{rs}|$ geldt

$$\sum_{r=1}^n A_{rs} A_{rt} = \begin{cases} 1, & \text{als } s = t \\ 0, & \text{als } s \neq t. \end{cases}$$

Is omgekeerd van een determinant $|a_{rs}|$ gegeven

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} a_{ts} = \begin{cases} 1, & \text{als } r = t \\ 0, & \text{als } r \neq t, \end{cases}$$

dan is deze orthogonaal, want vermeerder de met a_{11} vermenigvuldigde eerste kolom met $a_{12}x$ de tweede, $a_{13}x$ de derde, ..., $a_{1n}x$ de n^e kolom, waarna de determinant de gedaante

$$a_{11}a = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}$$

aanneemt. Dus $a_{11} = \frac{A_{11}}{a}$. Evenzo blijkt $a_{rs} = \frac{A_{rs}}{a}$.

Opg. 7. Als bij een determinant $|a_{rs}|$ geldt $\sum_{r=1}^n A_{rs}A_{rt} = \begin{cases} 1, & \text{als } s = t \\ 0, & \text{als } s \neq t \end{cases}$

dan is die determinant orthogonaal. Wij beschouwen thans het product $|c_{rs}|$ van twee orthogonale determinanten $|a_{rs}|$ en $|b_{rs}|$. Hiervoor geldt

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n c_{rs}^2 &= \sum_{r=1}^n \sum_{h=1}^n a_{rh}a_{hs} \sum_{k=1}^n a_{rk}b_{ks} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n b_{hs}b_{ks} \sum_{r=1}^n a_{rh}a_{rk} = \\ &= \sum_{h=1}^n b_{hs}b_{hs} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n c_{rs}c_{rt} &= \sum_{r=1}^n \sum_{h=1}^n a_{rh}b_{hs} \sum_{k=1}^n a_{rk}a_{kt} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n b_{hs}b_{kt} \sum_{r=1}^n a_{rh}a_{rk} = \\ &= \sum_{h=1}^n b_{hs}b_{ht} = 0 \quad (s \neq t), \end{aligned}$$

zodat de productdeterminant in verband met het bovenstaande ook orthogonaal is. Een veel eenvoudiger bewijs geven wij in de volgende paragraaf.

§ 15. Verdere eigenschappen van matrices.

Men definiëert de productmatrix $C = \|c_{rs}\|$ van twee matrices $A = \|a_{rs}\|$ en $B = \|b_{rs}\|$, op grond van het gevondene bij determinanten door de formules

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^n a_{rk}b_{ks}.$$

Men schrijft $C = AB$.

Voorbeeld: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 11 & 0 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 45 \\ 97 & 68 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Opg. 1. Onder welke voorwaarden is het product van twee matrices gedefinieerd?

Opg. 2. Bepaal in welke gevallen het product van twee matrices een kwadratische matrix is.

Opg. 3. Als de kwadratische matrices A, B en C voldoen aan $C=A \cdot B$, dan geldt voor de waarden a, b en c der bijbehorende determinanten $c=ab$.

Definitie. Hebben de matrices $A = \|a_{rs}\|$ en $B = \|b_{rs}\|$ evenveel kolommen, dan definieert men $C=A+B$, indien $c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}$.

Opg. 4. Bewijs $A+B = B+A$.

Verder definieert men voor ieder getal k $B=kA$, indien $b_{rs} = ka_{rs}$.

Opg. 5. Bewijs $k(A+B) = kA+kB$;

Opg. 6. Is A een kwadratische matrix van de orde n en $B=kA$, dan geldt voor de waarde der bijbehorende determinanten $b = k^n a$.

Opg. 7. Bewijs $C(A+B) = CA+CB$.

Opg. 8. Laat door een voorbeeld zien dat niet steeds behoeft te gelden $AB = BA$.

Is bij een kwadratische matrix $a_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{voor } r = s \\ 0 & \text{voor } r \neq s \end{cases}$, dan noemt men deze eenheidsmatrix I.

Opg. 9. Is de matrix I van de orde n en heeft de matrix A n kolommen dan is $AI = A$; heeft A echter n rijen dan is $IA = A$. Heeft A n rijen en n kolommen, dan is $AI = IA = A$.

Opg. 10. Bewijs voor ieder natuurlijk getal m de relatie $I^m = I$.

Vervangt men in een matrix A elk element a_{rs} door het toegevoegde element a_{sr} , dan ontstaat de toegevoegde matrix, die men veelal met A' aangeeft. Bv. de toegevoegde matrix van $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; van

$(a_1 \dots a_n)$ luidt de toegevoegde $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Opg. 11. Bewijs $(A+B)' = A' + B'$; $(AB)' = B'A'$.

Opg. 12. Is $A = A'$, $B = B'$, dan is $AB = (BA)'$.

Is $A = \|a_{rs}\|$, dan definieert men $A^{-1} = \|\frac{A_{sr}}{a}\|$, d.w.z. de elementen

b_{rs} van $B = A^{-1}$ hebben de gedaante $b_{rs} = \frac{A_{sr}}{a}$. De matrix A wordt hierbij quadratisch verondersteld.

Opg. 13. Bewijs $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Opg. 14. Bewijs $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Voert men nog in de nulmatrix O, waarvan alle elementen gelijk zijn aan nul, dan vindt men dat voor kwadratische matrices de volgende rekenregels gelden: Bij elk tweetal matrices A en B met gelijk aantal rijen en gelijk aantal kolommen bestaat één matrix, die de som $A + B$ wordt genoemd. Deze som voldoet aan:

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + O = O + A = A.$$

Bij elke A bestaat een matrix B met $A + B = B + A = O$; voor deze matrix B schrijft men wel $-A$ (geheel in overeenstemming met de definitie van kA).

Bij elk paar kwadratische matrices A en B bestaat één matrix, die het product AB wordt genoemd.

Dit product voldoet aan

$$A(BC) = (AB)C$$

$$AI = IA = A$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Bij elke A met $a \neq 0$ bestaat een matrix B, zodanig dat $AB = I$. De matrix B heet de inverse matrix. Men schrijft $B = A^{-1}$ en heeft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Men definieert $A^{-n} = (A^{-1})^n$ voor gehele positieve n en $A^0 = I$.

Opg. 15. Bewijs $A^{-n}A^n = I$.

Opg. 16. Bewijs voor willekeurige gehele m en n

$$A^m A^n = A^{m+n}$$

Opg. 17. Bewijs $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Opg. 18. Is bij een matrix A de determinant a al of niet gelijk aan nul, dan geldt voor de matrix B met $b_{rs} = A_{sr}$ de relatie

$$BA = AB = \begin{vmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{vmatrix} = |A| I.$$

Naast de bijzondere determinanten, die wij in § 7 beschouwden, beschouwen wij de corresponderende bijzondere matrices.

Een matrix A is symmetrisch als $A = A'$ en scheefsymmetrisch als $A = -A'$.

Een matrix A is orthogonaal als $A' = A^{-1}$. Dus $A'A = AA' = I$. Beschouw een matrix $X = (x_1, \dots, x_n)$ en een orthogonale matrix A van de orde n. Zij $Y = XA$, dus $Y' = A'X'$, dan is $\sum_{i=1}^n y_i^2 = YY' = XA(A'X') = X(AA')X' = XIX' = XX' = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Is S een scheefsymmetrische matrix, dan is de matrix $A = (I+S)(I-S)^{-1}$ orthogonaal. Immers wegens $S' = -S$ heeft men

$$\begin{aligned}
AA' &= (I+S) (I-S)^{-1} \left\{ (I+S)(I-S)^{-1} \right\}' \\
&= (I+S) (I-S)^{-1} \left\{ (I-S)^{-1} \right\}' (I+S)' \\
&= (I+S) (I-S)^{-1} (I'-S')^{-1} (I'+S') \\
&= (I+S) (I-S)^{-1} (I+S)^{-1} (I-S) \\
&= (I+S) (I+S)^{-1} (I-S)^{-1} (I-S) \quad (\text{want } (I-S)(I+S) = I^2 - S^2 = \\
&\hspace{15em} = (I+S)(I-S)) \\
&= I \cdot I = I.
\end{aligned}$$

Is S scheefsymmetrisch en Q symmetrisch, dan is $A = (I+SQ)(I-SQ)^{-1}$ orthogonaal, want wegens $S' = -S$, $Q' = Q$ heeft men

$$\begin{aligned}
AA' &= (I+SQ) (I-SQ)^{-1} \left\{ (I+SQ)(I-SQ)^{-1} \right\}' \\
&= (I+SQ) (I-SQ)^{-1} (I+SQ)^{-1} (I-SQ) \\
&= (I+SQ) (I+SQ)^{-1} (I-SQ)^{-1} (I-SQ) = I \cdot I = I,
\end{aligned}$$

wegens

$$(I+SQ)(I-SQ) = I+SQ-SQ-SQSQ = (I-SQ)(I+SQ).$$

§ 16. Symmetrische functies.

Bij de vierkantsvergelijking $z^2 - a_1 z + a_2 = 0$ met de wortels z_1 en z_2 zijn de elementair-symmetrische functies $a_1 = z_1 + z_2$ en $a_2 = z_1 z_2$. Wij gaan nu beschouwen gehele rationale symmetrische functies van z_1 en z_2 , dwz. veeltermen in z_1 en z_2 , die niet veranderen, als z_1 en z_2 worden verwisseld. Bij voorbeeld:

$$\begin{aligned}
z_1^2 + z_2^2 &= (z_1 + z_2)^2 - 2 z_1 z_2 = a_1^2 - 2 a_2. \\
z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3 z_1 z_2 (z_1 + z_2) = a_1^3 - 3 a_1 a_2. \\
z_1^4 + z_2^4 &= (z_1 + z_2)^4 - z_1 z_2 (4z_1^2 + 6z_1 z_2 + 4z_2^2) = a_1^4 - a_2 (4a_1^2 - 8a_2 + 6a_2).
\end{aligned}$$

In deze voorbeelden hebben we genomen homogene veeltermen in z_1 en z_2 resp. van de graad 2, 3 en 4. In het eerste antwoord hebben we gevonden een veelterm in a_1 en a_2 , waarvan elke term het gewicht 2 bezit; daarbij wordt aan een constante het gewicht 0, aan a_1 het gewicht 1 en aan a_2 het gewicht 2 toegerekend en onder het gewicht van een product verstaan de som van de gewichten der factoren. Een veelterm, waarvan elke term eenzelfde gewicht bezit, heet isobaar (isos = gelijk, baros = gewicht). Het eerste antwoord is dus een isobare veelterm met gewicht 2. Het tweede antwoord is een isobare veelterm met gewicht 3 en het derde een isobare veelterm met gewicht 4. Ander voorbeeld:

$$\begin{aligned}
z_1^4 + 3 z_1^3 z_2 + 3 z_1 z_2^3 + z_2^4 &= (z_1^4 + z_2^4) + 3 z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2) = \\
&= a_1^4 - 4 a_1^2 a_2 + 2 a_2^2 + 3 a_2 (a_1^2 - 2 a_2)
\end{aligned}$$

zodat dit antwoord wederom een isobare veelterm met gewicht 4 is.

We gaan nu de volgende stelling bewijzen.

Een homogene symmetrische veelterm in z_1 en z_2 van de m^o graad is te schrijven als een isobare veelterm in a_1 en a_2 met gewicht m .

De bewering is evident voor $m = 1$, want een homogene symmetrische veelterm in z_1 en z_2 van de 1^e graad heeft de gedaante $cz_1 + cz_2 = ca_1$. Wij mogen dus $m \geq 2$ veronderstellen en aannemen, dat de bewering reeds bewezen is, wanneer m door een kleiner natuurlijk getal wordt vervangen.

We kunnen de beschouwde homogene symmetrische veelterm van de m^e graad schrijven in de gedaante

$$c(z_1^m + z_2^m) + z_1 z_2 P(z_1, z_2),$$

Waarin P een homogene symmetrische veelterm van de graad $m - 2$ is. Verder kunnen we schrijven

$$z_1^m + z_2^m = (z_1 + z_2)^m + z_1 z_2 Q(z_1, z_2),$$

waarin Q eveneens een homogene symmetrische veelterm van de graad $m - 2$ is. Aldus hebben we de oorspronkelijke symmetrische veelterm geschreven in de gedaante

$$c(z_1 + z_2)^m + z_1 z_2 R(z_1, z_2),$$

waarin R een homogene symmetrische veelterm van de graad $m - 2$ voorstelt.

(Als $m = 2$, is R een constante). Volgens onze inductie veronderstelling is $R(z_1, z_2)$ gelijk aan een isobare veelterm $U(a_1, a_2)$ met gewicht $m - 2$. Dus de oorspronkelijke homogene symmetrische veelterm in z_1 en z_2 van de m^e graad is gelijk aan

$$c a_1^m + a_2 U(a_1, a_2)$$

en dit antwoord is inderdaad een isobare veelterm met gewicht m .

Opg. 1. Bewijs dat $z_1^{10} + z_2^{10}$ te schrijven is in de gedaante

$$c_1 a_1^{10} + c_2 a_1^8 a_2 + c_3 a_1^6 a_2^2 + c_4 a_1^4 a_2^3 + c_5 a_1^2 a_2^4 + c_6 a_2^5,$$

waarin $c_1, \dots, c_6$ absolute constanten voorstellen.

Opmerking. Deze constanten kunnen worden bepaald op de manier, zoals in het bewijs is aangegeven. De berekening kan echter vlugger als volgt geschieden.

$$\begin{aligned} z_1^5 + z_2^5 &= (z_1 + z_2)(z_1^4 + z_2^4 - z_1 z_2(z_1^2 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2) \\ &= a_1(a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 2a_2^2 - a_1^2 a_2 + 2a_2^2 + a_2^2) \\ &= a_1(a_1^4 - 5a_1^2 a_2 + 5a_2^2). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} z_1^{10} + z_2^{10} &= (z_1^5 + z_2^5)^2 - 2z_1^5 z_2^5 = \\ &= a_1^2(a_1^4 - 5a_1^2 a_2 + 5a_2^2)^2 - 2a_2^5 \text{ enz.} \end{aligned}$$

Aldus blijkt $c_1 = 1$, $c_2 = -10$, $c_3 = 35$, $c_4 = -50$, $c_5 = 25$, $c_6 = -2$.

Worden slechts enkele coëfficiënten gevraagd dan kan men soms vlugger te werk gaan. Wil men bv. alleen de coëfficiënt c_6 bepalen, dan beschouwt men een vierkantsvergelijking, waarbij $a_1 = 0$ is, bv. de vierkantsvergelijking $z^2 - 1 = 0$. Bij deze vergelijking (die de wortel ± 1 bezit), is $z_1^{10} + z_2^{10} = 2$, terwijl het antwoord gelijk moet zijn aan $-c_6$; dus $c_6 = -2$.

Opg. 2. Wat is de gemakkelijkste manier om c_1 te bepalen?

In plaats van vierkantsvergelijkingen gaan we nu vergelijkingen van willekeurige graad n beschouwen. We schrijven zo'n vergelijking in de gedaante

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

Noem de wortels van deze vergelijking $z_1, \dots, z_n$. De elementaire symmetrische functies zijn hier

$$a_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum z_i$$

$$a_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \sum z_i z_j$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n-1} = z_1 z_2 \dots z_{n-1} + \dots + z_2 \dots z_n = \sum z_1 z_2 \dots z_{n-1}$$

$$a_n = z_1 z_2 \dots z_n.$$

De hier optredende sommen bevatten resp. $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$ termen.

Wij stellen ons de vraag of bij een vergelijking van willekeurige graad een stelling geldt, analoog aan die, welke we bij vierkantsvergelijkingen gevonden hebben. Daartoe is het nodig in te voeren het begrip van isobare veelterm in de coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$. De definitie ligt voor de hand. We geven aan een constante het gewicht 0, aan a_1 het gewicht 1, aan a_2 het gewicht 2, ..., a_n het gewicht n en we verstaan onder het gewicht van een product wederom de som der gewichten der factoren. Dus bv. $a_1^7 + 5a_1^5 a_2 + a_1 a_3^2$ is een isobare veelterm met gewicht 7. De stelling, die we nu gaan bewijzen, luidt als volgt:

Een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de m^e graad is te schrijven als een isobare veelterm in $a_1, \dots, a_n$ met gewicht m .

Anders uitgedrukt: Een symmetrische veelterm in de wortels van een algebraïsche vergelijking kan geheel rationaal worden uitgedrukt in de coëfficiënten van die vergelijking. In deze stelling wordt $m \geq 1$ verondersteld. De bewering is evident voor $n = 1$, want dan treedt slechts één wortel z_1 op, die gelijk is aan de coëfficiënt a_1 , die in de lineaire vergelijking voorkomt; de beschouwde homogene veelterm in z_1 heeft de gedaante $cz_1^m = ca_1^m$ en dit antwoord is isobaar met gewicht m . We mogen dus $n \geq 2$ veronderstellen (dat hierboven het bewijs voor $n = 2$ reeds geleverd is, wordt niet eens gebruikt) en we mogen veronderstellen, dat het bewijs reeds geleverd is, als n door $n - 1$ wordt vervangen.

De bewering is eveneens evident als m gelijk is aan 0. Immers, dan is de beschouwde homogene symmetrische veelterm een constante en een constante is te beschouwen als een isobare veelterm in $a_1, \dots, a_n$ met gewicht 0. Bij het bewijs mogen we dus $m \geq 1$ veronderstellen. Verder mogen we aannemen, dat het bewijs reeds geleverd is, als n onveranderd blijft, maar m door een kleiner getal wordt vervangen.

Wij hebben hier te doen met een voorbeeld van een bewijs met dubbele inductie.

Voordat we het algemene bewijs geven, willen wij eerst de bewijsvoering door een voorbeeld toelichten. Stel wij willen bewijzen, dat bij de cubische vergelijking $z^3 - a_1 z^2 + a_2 z - a_3 = 0$ met de wortels z_1, z_2 en z_3 de uitdrukking $z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$ te schrijven is als een isobare veelterm in a_1, a_2 en a_3 met gewicht 5. Daarbij hebben wij aangenomen, dat de overeenkomstige stelling reeds bewezen is voor vierkantsvergelijkingen, d.w.z. dat bij de vierkantsvergelijking $Z^2 - A_1 Z + A_2 = 0$ met de wortels z_1 en z_2 de uitdrukking $z_1^5 + z_2^5$ te schrijven is als een isobare veelterm $A_1^5 - 5A_1^3 A_2 + 5A_1 A_2^2$. Nu komt de kunstgreep: Wij gaan nl. beschouwen $v = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 - (a_1^5 - 5a_1^3 a_2 + 5a_1 a_2^2)$.

De eigenaardigheid is, dat we in het gevonden antwoord de coëfficiënten A_1 en A_2 eenvoudig door a_1 en a_2 gaan vervangen en het aldus verkregen antwoord aftrekken van de functie, die we willen onderzoeken. Wij weten dat a_1 en a_2 elementaire symmetrische functies zijn van z_1, z_2 en z_3 , die in A_1 en A_2 overgaan, als z_3 door 0 wordt vervangen. Hieruit blijkt dat v een symmetrische functie is van z_1, z_2 en z_3 ; wordt z_3 door 0 vervangen dan gaat v over in

$$z_1^5 + z_2^5 - (A_1^5 - 5A_1^3 A_2 + 5A_1 A_2^2)$$

en we hebben ervoor gezorgd, dat dit juist nul is. De symmetrische veelterm v wordt dus 0 als z_3 door 0 wordt vervangen, waaruit blijkt dat elk zijner termen door z_3 deelbaar is. Vanwege de symmetrie is elke term dan deelbaar door z_1 en z_2 , dus ook door $z_1 z_2 z_3$. We krijgen dus $v = z_1 z_2 z_3 w$, waarin w een homogene symmetrische veelterm in z_1, z_2 en z_3 voorstelt van de tweede graad. Die veelterm zouden we kunnen neerschrijven, (uitvoeren!) maar dat is voor ons bewijs niet nodig, omdat we verondersteld hebben, dat de stelling reeds bewezen is voor $n = 3$ en voor alle homogene symmetrische veeltermen van de graad ≥ 5 . Uit deze inductieveronderstelling volgt, dat w te schrijven is als een isobare veelterm in a_1, a_2, a_3 met gewicht 2. Derhalve is

$$z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = a_1^5 - 5a_1^3 a_2 + 5a_1 a_2^2 + a_3 w$$

geschreven als een isobare veelterm in a_1, a_2, a_3 met gewicht 5.

Na deze toelichting aan dit speciale geval met $n = 3$ en $m = 5$ gaan we over tot de volkomen analoge behandeling van het algemene geval.

Bij de vergelijking

$$z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-)^n a_n = 0$$

met de wortels $z_1, \dots, z_n$ zij gegeven een homogene symmetrische veelterm $f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$. Daarbij hebben we aangenomen, dat de te bewijzen stelling reeds bewezen is voor vergelijkingen van de graad $n-1$.

Bij de vergelijking

$$z^{n-1} - A_1 z^{n-2} + \dots + (-)^{n-1} A_{n-1} = 0$$

met de wortels $z_1, \dots, z_{n-1}$ is $f(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ ofwel identiek nul, ofwel een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_{n-1}$ van de graad m . Volgens onze inductieveronderstelling is deze uitdrukking, als ze niet identiek nul is, te schrijven als een isobare veelterm $g(A_1, \dots, A_{n-1})$ met gewicht m . Indien de uitdrukking wel nul is, verstaan we onder $g(A_1, \dots, A_{n-1})$ eenvoudig het getal 0.

De kunstgreep bestaat nu hierin, dat we beschouwen

$$v = f(z_1, \dots, z_n) - g(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Men lette er dus op, dat hier wederom de coëfficiënten A door de overeenkomstige coëfficiënten a zijn vervangen. We weten, dat $a_1, \dots, a_{n-1}$ elementaire symmetrische functies zijn van $z_1, \dots, z_n$, die overgaan in $A_1, \dots, A_{n-1}$, als z_n door 0 wordt vervangen. Hieruit blijkt, dat v een symmetrische functie van $z_1, \dots, z_n$ is. Hierbij is a_1 een veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de 1^e graad, a_2 een veelterm van de 2^e graad, enz. Omdat $g(a_1, \dots, a_{n-1})$ isobaar is met gewicht m , gaat deze functie over in een homogene veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de graad m . Dus ook v is een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de graad m .

Wordt z_n door 0 vervangen, dan gaat v over in

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) - g(A_1, \dots, A_{n-1})$$

en we hebben ervoor gezorgd, dat dit juist nul is. De veelterm v wordt dus 0 als z_n door 0 wordt vervangen, waaruit blijkt, dat elk zijner termen door z_n deelbaar is. Vanwege de symmetrie is elke term dan eveneens door $z_1, \dots, z_{n-1}$ deelbaar, dus deelbaar door $z_1 z_2 \dots z_n$.

We krijgen dus

$$v = z_1 z_2 \dots z_n w,$$

waarin w een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ voorstelt van de graad $m-n$; is $m < n$, dan is w identiek nul. Is $m \geq n$, dan vinden we dus, dat v identiek nul is, dus $f(z_1, \dots, z_n) = g(a_1, \dots, a_{n-1})$; waarbij het rechterlid isobaar is met gewicht m . In dat geval is de stelling bewezen. Voor $m < n$ komt dus a_n in het antwoord niet voor.

Zij nu verder $m \geq n$. Omdat w een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ voorstelt van een graad $m-n$, die kleiner is dan m , volgt uit de inductieveronderstelling, dat w te schrijven is als een isobare veelterm in $a_1, \dots, a_n$ met gewicht $m-n$. Derhalve is

$$f(z_1, \dots, z_n) = g(a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n w$$

geschreven als een isobare veelterm in $a_1, a_2, \dots, a_n$ met gewicht m . Hiermede is het bewijs volledig geleverd.

Opg. 3. Beschouw in de opgaven 3, 4, 5 en 6 de vergelijking

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

Bewijs dat de som van de derde machten der wortels gelijk is aan $a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3$. Waarin gaat deze betrekking over bij een vergelijking van de 2e graad of bij een lineaire vergelijking?

Opg. 4. Bewijs $\sum z_1^2 z_2 = a_1 a_2 - 3a_3$.

Uit hoeveel termen bestaat het linkerlid? Wat wordt deze betrekking bij vergelijkingen van de eerste of tweede graad?

Opg. 5. Bewijs $\sum \frac{1}{z_1 z_2 z_3} = \frac{a_{n-3}}{a_n}$. Uit hoeveel termen bestaat het linkerlid?

Opg. 6. Bewijs $\sum \frac{z_1}{z_2} = -\frac{a_1 a_{n-1}}{a_n} - n$.

Opg. 7. Bewijs dat bij de vierkantsvergelijking $z^2 - a_1 z + a_2 = 0$

z_1^m , waarin m een natuurlijk getal is, te schrijven is in de gedaante

$z_1^m = P_m z_1 + Q_m$, waarin P_m en Q_m isobare veeltermen in a_1 en a_2 voorstellen. Bepaal verder de gewichten van P_m en Q_m en geef de teruglopende betrekkingen aan, waarmee P_m en Q_m kunnen worden berekend.

Wenst men in de praktijk de symmetrische functies uit te drukken in de elementair-symmetrische, dan gaat men veelal als volgt te werk.

Uit $f(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = b_0 (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$ volgt

$$(1) \quad f'(z) = n b_0 z^{n-1} + (n-1) b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} =$$

$$= \frac{f(z)}{z-z_1} + \frac{f(z)}{z-z_2} + \dots + \frac{f(z)}{z-z_n}.$$

Men heeft

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z-z_1} &= \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \frac{b_0(z^n - z_1^n)}{z-z_1} + \frac{b_1(z^{n-1} - z_1^{n-1})}{z-z_1} + \dots + \\ &+ \frac{b_{n-1}(z - z_1)}{z-z_1} = b_0(z^{n-1} + \dots + z_1^{n-1}) + \dots + b_{n-1}, \end{aligned}$$

dus

$$\sum_{m=1}^n \frac{f(z)}{z-z_m} = b_0 s_0 z^{n-1} + (b_0 s_1 + b_1 s_0) z^{n-2} \dots + (b_0 s_2 + b_1 s_1 + b_2 s_0) z^{n-3} + \dots$$

De hierbij optredende uitdrukkingen $s_k = z_1^k + \dots + z_n^k$ worden sommen van Newton genoemd. Men heeft $s_0 = n$.

Vergelijkt men in (I) de termen met gelijke machten van z , dan vindt men

$$\left\{ \begin{array}{l} nb_0 = b_0 s_0 \\ (n-1)b_1 = b_0 s_1 + b_1 s_0 \\ (n-2)b_2 = b_0 s_2 + b_1 s_1 + b_2 s_0 \\ \dots \end{array} \right\} \text{ dus } \left\{ \begin{array}{l} b_0 s_1 + b_1 = 0 \\ b_0 s_2 + b_1 s_1 + 2b_2 = 0 \\ b_0 s_3 + b_1 s_2 + b_2 s_1 + 3b_3 = 0 \\ \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

Hieruit kunnen de sommen $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ worden berekend. Verder volgen uit $f(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ na vermenigvuldiging met $1, z, z^2, \dots$ en na substitutie van z door $z_1, \dots, z_n$ en optellen de relaties

$$\begin{aligned} b_0 s_n + b_1 s_{n-1} + \dots + nb_n &= 0 \\ b_0 s_{n+1} + b_1 s_n + \dots + b_n s_1 &= 0 \\ b_0 s_{n+2} + b_1 s_{n+1} + \dots + b_n s_2 &= 0, \text{ enz.} \end{aligned}$$

zodat ook voor $k \geq n$ uit (2) de grootheden s_k gevonden kunnen worden, als men daarin $b_r = 0$ stelt voor $r > n$.

Opg. 8. Laat zien hoe men ook de grootheden b_k voor $k < 0$ uit (2) kan afleiden.

Om nu bv. de som $\sum z_1^2 z_2$ te berekenen, gebruiken we de relatie

$\sum z_1^2 z_2 = -s_3 + s_1 s_2$, waarmee de gezochte som in reeds bekende grootheden is uitgedrukt.

Wenst men de som $\sum z_1^2 z_2^2 z_3$ te berekenen, dan kan men bv. gebruik maken van de gevonden uitdrukking voor $\sum z_1^2 z_2$. Vermenigvuldigt men deze met s_2 dan ontstaat een resultaat, waarin o.a. de gezochte term optreedt.

Opg. 9. Voer die berekening uit.

Opg. 10. Bereken bij de vergelijking $z^{10} + az^2 + bz + c = 0$ de som

$$\sum z_1^7 z_2^2; \text{ eveneens de som } \sum z_1^7 z_2^3 z_3.$$

Wij voeren naast de enkelvoudige sommen $\sum x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^t$ nog sommen in, die wij complete sommen noemen en aanduiden met

$$\sum^* x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^t.$$

De bedoeling hierbij is, dat als onder de exponenten $a, b, c, \dots$ één of meer gelijke optreden, bv. $a=b$, naast de term $x_1^a x_2^a x_3^b \dots x_m^t$ in de complete som ook de term $x_1^a x_2^a x_3^b \dots x_m^t$ optreedt, hetgeen in de enkelvoudige som niet het geval is.

In het algemeen: treden onder de exponenten $a, b, c, \dots, j_1$ gelijke op, verder j_2 gelijke hiervan verschillende exponenten, j_3 gelijke exponenten verschillend van de j_1 genoemde en de j_2 genoemde, ..., dan heeft men voor de enkelvoudige som $\sum$ en de complete ermee corresponderende som $\sum^*$

$$\sum^* = j_1! j_2! \dots \sum$$

Men heeft dan de volgende formule voor complete sommen

$$\sum x_1^h \sum^* x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^t = \sum^* x_1^h x_2^a x_3^b x_4^c \dots x_m^t + \sum^* x_1^{a+h} x_2^b x_3^c \dots x_m^t + \dots + \sum^* x_1^a x_2^{b+h} x_3^c \dots x_m^{t+h}.$$

Vb. Zij gevraagd de som $\sum x_1^3 x_2 x_3$ te berekenen.

Wij gaan uit van de relaties

$$\sum^* x_1^3 x_2 x_3 = \sum x_1^3 \sum^* x_1 x_2 - 2 \sum^* x_1^4 x_2$$

$$\sum^* x_1^4 x_2 = \sum x_1^4 \sum x_1 - \sum x_1^5 = S_1 S_4 - S_5, \text{ dus}$$

$$\sum^* x_1^3 x_2 x_3 = 2a_2 S_3 - 2S_1 S_4 + 2S_5 = 2a_2 S_3 + 2a_1 S_4 + 2S_5 = -2a_3 S_2 - 2a_4 S_1 - 10a_5,$$

dus

$$\sum x_1^3 x_2 x_3 = -a_3(a_1^2 - 2a_2) + a_1 a_4 - 5a_5 = -a_1^2 a_3 + a_1 a_4 + 2a_2 a_3 - 5a_5.$$

Anders:

$$3 \sum^* x_1^3 x_2 x_3 = \sum x_1^2 \sum^* x_1 x_2 x_3 - \sum^* x_1^2 x_2 x_3 x_4$$

$$4 \sum^* x_1^2 x_2 x_3 x_4 = \sum x_1 \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 - \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

dus

$$\begin{aligned} 3 \sum^* x_1^3 x_2 x_3 &= (a_1^2 - 2a_2) \sum^* x_1 x_2 x_3 + \frac{1}{4} a_1 \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 + \frac{1}{4} \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &= -6(a_1^2 - 2a_2)a_3 + 6a_1 a_4 - 30a_5. \end{aligned}$$

Dus

$$\sum x_1^3 x_2 x_3 = -a_1^2 a_3 + a_1 a_4 + 2a_2 a_3 - 5a_5.$$

§ 17. Eliminatie

Wij wens in deze paragraaf na te gaan onder welke voorwaarden twee veeltermen

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n; g(x) = b_0 x^m + \dots + b_m$$

een nulpunt gemeen hebben. Wij zoeken daartoe een functie die alleen afhangt van de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ en die dan en slechts dan nul wordt als een der n nulpunten $x_1, \dots, x_n$ van $f(x)$ samenvalt met een der m nulpunten $y_1, \dots, y_m$ van $g(x)$. Het is duidelijk dat de functie

$$C = \prod_{\mu=1}^m \prod_{\nu=1}^n (x_{\nu} - y_{\mu})$$

juist in die gevallen nul wordt. Wij merken verder op dat uit $g(x) = b_0(x-y_1)\dots(x-y_m)$ volgt $g(x_1) = b_0(x_1-y_1)\dots(x_1-y_m)$, dus

$$C = \prod_{\nu=1}^n \frac{g(x_{\nu})}{b_0}.$$

De functie $Cb_0^n = \prod_{\nu=1}^n g(x_{\nu})$ is een gehele rationale symmetrische functie in de grootheden $x_1, \dots, x_n$ en dus volgens de theorie der symmetrische functies geheel en rationaal uit te drukken in de grootheden $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$. Deze functie is van de graad m in elk der grootheden $x_1, \dots, x_n$, zodat a_0^m maal deze functie, dus de functie

$$D_{fg} = a_0^m b_0^n C$$

geheel en rationaal uit te drukken is in de grootheden $a_0, a_1, \dots, a_n$; $b_0, b_1, \dots, b_m$.

Uit $D_{fg} = a_0^m \prod_{\nu=1}^n g(x_{\nu})$ ziet men dat D_{fg} homogeen en van de graad n is in de grootheden $b_0, \dots, b_m$; evenzo is D_{fg} homogeen en van de graad m in de grootheden $a_0, \dots, a_n$.

Toepassing. Bepaal de uitdrukking D_{fg} voor de veeltermen

$$f(x) = a_0x + a_1; \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2.$$

Men vindt

$$D_{fg} = a_0^2 g(x_1) = b_0 a_1^2 - b_1 a_1 a_0 + b_2 a_0^2,$$

of door uit te gaan van $g(x)$

$$\begin{aligned} D_{fg} &= a_0^2 f(y_1) f(y_2) = b_0 (a_0 y_1 + a_1)(a_0 y_2 + a_1) \\ &= b_0 (a_0^2 y_1 y_2 + a_0 a_1 (y_1 + y_2) + a_1^2) = b_2 a_0^2 - b_1 a_0 a_1 + b_0 a_1^2. \end{aligned}$$

Opg. 1. Bepaal de uitdrukking D_{fg} voor de veeltermen $a_0x + a_1$ en $b_0x + b_1$.

Opg. 2. Bewijs dat de uitdrukking D_{fg} voor twee veeltermen f en g resp. van de graad n en m gelijk is aan de uitdrukking D_{gf} voor de veeltermen g en f afgezien van een factor $(-)^{mn}$.

Wij zien dat de functie D_{fg} of de functie $D_{gf} = (-)^{mn} D_{fg}$ dan en slechts dan nul wordt als de veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ een nulpunt gemeen hebben. De functie D_{fg} is dus de resultante van de veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ en deze resultante is zoals wij hierboven zagen, homogeen en van de graad n in de coëfficiënten $b_0, b_1, \dots, b_m$ van $g(x)$ en homogeen en van

de graad m in de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n$ van $f(x)$. De resultante is dus homogeen en van de graad $m+n$ in de coëfficiënten van de veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ tesamen. Wij tonen ook nog aan dat de resultante isobaar is in de coëfficiënten van deze beide veeltermen tesamen.

Beschouw daartoe de vergelijking $\varphi(\xi) = 0$, waarvan alle nulpunten $\xi_1, \dots, \xi_n$ t maal zo groot zijn als die van $f(x)$, dus als

$$\varphi(\xi) = a_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

dan is $\alpha_1 = ta_1$; $\alpha_2 = t^2 a_2$; ...; $\alpha_n = t^n a_n$. Verder beschouwe men de veelterm $\chi(\xi)$ waarvan de nulpunten t maal zo groot zijn als die van $g(x)$. Voor de coëfficiënten $b_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ van $\chi(\xi)$ ziet men dan direct in dat geldt

$$\beta_1 = tb_1, \beta_2 = t^2 b_2, \dots, \beta_m = t^m b_m.$$

Verder is

$$\begin{aligned} D_{\varphi\chi} &= a_0^m b_0^n \prod_{\mu, \nu} (\xi_\nu - \eta_\mu) = a_0^m b_0^n \prod_{\mu, \nu} t(x_\nu - y_\mu) \\ &= t^{mn} a_0^m b_0^n \prod_{\mu, \nu} (x_\nu - y_\mu) = t^{mn} D_{fg}. \end{aligned}$$

Daar $D_{\varphi\chi}$ ontstaat uit D_{fg} door bij D_{fg} in elke term a_1 te vervangen door α_1 , a_2 door α_2 , ..., a_n door α_n , b_1 door β_1 , b_2 door β_2 , ..., b_m door β_m en bij die vervanging hierbij evenveel factoren t gewonnen worden als de index aangeeft, is het gewicht van iedere term van D_{fg} gelijk aan mn , dus D_{fg} is isobaar van het gewicht mn in de coëfficiënten van de veeltermen f en g .

Indien men op een of andere wijze een veelterm V in de grootheden $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ afleidt, die nul wordt als f en g een wortel gemeen hebben, is die veelterm V deelbaar door D_{fg} . Immers de veelterm V is symmetrisch in de grootheden $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ en wordt nul als er een i en j bestaan zodanig dat $x_i = y_j$, zodat V de factor $x_i - y_j$ bevat, maar wegens de symmetrie is V dan deelbaar door elk der $m \cdot n$ uitdrukkingen $x_\nu - y_\mu$, dus door hun product C . Daar echter C gebroken rationaal is in de grootheden $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$, (en wel met noemer $a_0^m b_0^n$), is V deelbaar door $a_0^m b_0^n C$, dus door D_{fg} .

Toepassing. Men elimineert x uit de vergelijkingen

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$$g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

op twee wijzen, nl. door ze met b_0 resp. a_0 te vermenigvuldigen en af te trekken en door ze met b_2 resp. a_2 te vermenigvuldigen en af te trekken. Men vindt dan bij $x \neq 0$

$$(ab)_{10}x + (ab)_{20} = 0$$

$$(ab)_{02}x + (ab)_{12} = 0$$

(hierin stelt $(ab)_{ij}$ de determinant $a_i b_j - a_j b_i$ voor) en dus na eliminatie van x

$$R = (ab)_{10}(ab)_{12} + (ab)_{02}^2 = 0$$

Deze relatie geldt ook in het nog niet behandelde uitzonderingsgeval $x=0$, want dan is $a_2 = b_2 = 0$. Men kan het gevonden resultaat nog in een andere gedaante brengen. Men heeft nl.

$$R = \begin{vmatrix} (ab)_{02} & (ab)_{12} \\ (ab)_{01} & (ab)_{02} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 b_2 - a_2 b_0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 & a_0 b_2 - a_2 b_0 \end{vmatrix},$$

waaruit na 2 maal randen volgt

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Dit laatste resultaat is een bijzonder geval van een resultaat dat ons door de eliminatie methode van Sylvester wordt gegeven. Indien de vergelijkingen $f(x) = 0$ en $g(x) = 0$ een wortel gemeen hebben, is dit getal x wortel van elk der vergelijkingen

$$x^{m-1}f(x)=0, x^{m-2}f(x)=0, \dots, xf(x)=0, f(x)=0, x^{n-1}g(x)=0, x^{n-2}g(x)=0, \dots, xg(x)=0, g(x)=0.$$

Schrijft men deze vergelijkingen uit dan ziet men dat het systeem homogene vergelijkingen

$$a_0 z_{m+n-1} + a_1 z_{m+n-2} + \dots + a_n z_{m-1} = 0$$

$$a_0 z_{m+n-2} + \dots + a_n z_{m-2} = 0$$

.....

$$a_0 z_n + \dots + a_n z_0 = 0$$

$$b_0 z_{m+n-1} + b_1 z_{m+n-2} + \dots + b_m z_{n-1} = 0$$

$$b_0 z_{m+n-2} + \dots + b_m z_{n-2} = 0$$

.....

$$b_0 z_m + \dots + b_m z_0 = 0$$

tegelijk moet bestaan (en wel de oplossing

$$z_0 = 1, z_1 = x, z_2 = x^2, \dots, z_{m+n-1} = x^{m+n-1}$$

die niet de nuloplossing is, moet bezitten), zodat de coëfficiënten determinant

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

nul is. Dat omgekeerd uit het nul zijn van R volgt, dat het stelsel een oplossing bezit, is evident maar het staat niet a priori vast dat die oplossing $(z_0, z_1, \dots, z_{m+n-1})$ de eigenschap bezit, dat $z_0 = 1$; $z_1 = z$; $z_2 = z^2$; $\dots$; $z_{m+n-1} = z^{m+n-1}$ en pas daaruit volgt dat f en g een nulpunt z_1 gemeen hebben, Dat dit bij $R=0$ toch wel het geval is, blijkt uit de hierboven gemaakte opmerking, dat als f en g een nulpunt gemeen hebben, $R=0$ is, zodat R deelbaar is door elk der verschillen $x_\nu - y_\mu$, dus door D_{fg} . Aangezien echter R niet identiek nul is (men kijke bv. naar de term $a_0^m b_0^n$, die in R éénmaal optreedt en wel met coëfficiënt 1) en van de graad m in de coëfficiënten a_ν en van de graad n in de coëfficiënten b_μ is, kunnen R en D_{fg} slechts in een constante factor verschillen, zodat uit $R=0$ inderdaad volgt dat $D_{fg} = 0$ is, dus dat f en g een nulpunt gemeen hebben.

Opg. 3. Toon aan dat een gemeenschappelijk nulpunt $f(x)$ en $g(x)$ ook een gemeenschappelijk nulpunt is van de veeltermen $f(x)$ en $f(x) + \lambda g(x)$ (λ willekeurig $\neq 0$).

Euler heeft nog een andere methode gegeven om de resultante der veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ te vinden. Hij merkte op, dat, als $f(x)$ en $g(x)$ een nulpunt c gemeen hebben. geldt $f(x) = (x-c) p(x)$; $g(x) = (x-c) q(x)$, dus

$$q(x) f(x) = p(x) q(x),$$

waarbij $p(x)$ en $q(x)$ ten hoogste van de graad $n-1$ resp. $m-1$ zijn. Omgekeerd als twee dergelijke veeltermen $p(x)$ en $g(x)$ bestaan, moeten de n lineaire factoren van $f(x)$ deelbaar zijn op het rechterlid $p(x) q(x)$, maar omdat $p(x)$ ten hoogste van de graad $n-1$ is, moet ten minste een dier factoren deelbaar zijn op $g(x)$, waaruit volgt dat $g(x)$ en $f(x)$ een factor, dus een nulpunt gemeen hebben. Zodra dus een tweetal veeltermen

$$p(x) = p_0 x^{n-1} + \dots + p_{n-1}; \quad q(x) = q_0 x^{m-1} + \dots + q_{m-1}$$

bepaald kan worden, waarvoor geldt $q(x) f(x) = p(x) g(x)$, hebben $f(x)$ en $g(x)$ een nulpunt gemeen. Door de producten $q(x) f(x)$ en $p(x) g(x)$ uit te werken en de coëfficiënten van overeenkomstige machten gelijk te stellen, ziet men dat er getallen $p_0, \dots, p_{n-1}; q_0, \dots, q_{m-1}$ (niet allen nul) bepaald kunnen worden zodanig dat

$$\begin{cases} p_0 b_0 & - q_0 a_0 & = 0 \\ p_0 b_1 + p_1 b_0 & - q_0 a_1 - q_1 a_0 & = 0 \\ p_0 b_2 + p_1 b_1 + p_2 b_0 & - q_0 a_2 - q_1 a_1 - q_2 a_0 & = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} b_m & - q_{m-1} a_n & = 0 \end{cases}$$

Van dit homogene stelsel moet de coëfficiëntendeterminant dus nul zijn en men ziet gemakkelijk in dat deze, na wentelen om de hoofddiagonaal, op eenvoudige wijze over te voeren is in de determinant R van Sylvester.

Opg. 4. Toon aan dat het bestaan van een veelterm $p(x)$ van de graad $n-2$ en een veelterm $q(x)$ van de graad $m-2$, die voldoen aan

$$q(x) f(x) = p(x) g(x)$$

tot gevolg heeft dat $f(x)$ en $g(x)$ twee wortels gemeen hebben.

Opg. 5. Bepaal de relaties die tussen de coëfficiënten der veeltermen

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad \text{en} \quad g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

moeten gelden, opdat deze een (resp. twee) nulpunten gemeen hebben.

§ 18. Toepassingen van de eliminatietheorie.

Wij geven van het gevondene twee toepassingen.

De eerste toepassing bestaat uit het opsporen van de snijpunten van twee willekeurige vlakke krommen $f(x,y)=0$ en $g(x,y)=0$, resp. van de graad n en m . We schrijven

$$f(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n; \quad g(x,y) = b_0 x^m + \dots + b_m,$$

waarbij elke coëfficiënt $a_\nu = a_\nu(y)$ een veelterm is van een graad in y en elke coëfficiënt $b_\mu = b_\mu(y)$ een veelterm is van een graad μ in y . Een snijpunt $S(x_0, y_0)$ van de krommen heeft de eigenschap, dat de veeltermen $f(x, y_0)$ en $g(x, y_0)$ een gemeenschappelijk nulpunt hebben, d.w.z. dat hun resultante nul is. Deze resultante is in ons geval een veelterm in y_0 en wel van een graad, die gelijk is aan het gewicht $m n$ dier resultante, juist omdat in de coëfficiënten a_ν resp. b_μ de grootte y in de ν^e resp. μ^e graad optreedt. Er zijn wegens de hoofdstelling der algebra juist $m n$ waarden y_0 te vinden waarvoor deze resultante (als veelterm van een graad $m n$ in y_0) nul wordt.

Is eenmaal zo'n waarde y_0 gevonden, dan kan het bijbehorende punt S gevonden worden door, zoals boven is opgemerkt, een stelsel van $m+n-1$ homogene lineaire vergelijkingen in de onbekenden

$$z_0 = 1, z_1 = x_0, z_2 = x_0^2, \dots, z_{m+n-1} = x_0^{m+n-1}$$

op te lossen, waaruit in het algemeen juist 1 waarde van x_0 volgt. In het algemeen vindt men zo dat twee vlakke krommen van de graden m en n precies $m \cdot n$ snijpunten gemeen hebben (stelling van Bezout). In de analytische of in de algebraïsche meetkunde worden deze resultaten gepreciseerd en de uitzonderingsgevallen, die zich hierbij kunnen voordoen en waarop wij nu niet ingaan, bestudeerd.

Opg. 1. Bepaal op de aangegeven wijze de snijpunten van de krommen

$$x^3 + y^3 = 4x \quad ; \quad x^2 + y^2 = 5$$

Opg. 2. Is het mogelijk dat twee krommen van de graad m resp. n meer dan $m \cdot n$ snijpunten hebben?

Een geheel andere toepassing van de eliminatietheorie levert ons de voorwaarde waaronder een veelterm $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ een dubbel nulpunt bezit. Wij weten dat het daartoe nodig en voldoende is, dat $f(x)$ en $f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$ een nulpunt gemeen hebben. Wij vinden de genoemde voorwaarde direct door de resultante R van f en f' op te schrijven, die van de graad $n+(n-1)$ in de coëfficiënten a is en van het gewicht $n(n-1)$. Men ziet echter onmiddellijk in dat deze resultante deelbaar is door a_0 , zodat wij na verwijdering van deze factor een resultante $D = \frac{R}{a_0}$ vinden, die in de coëfficiënten van de graad $2n-2$ en van het gewicht $n(n-1)$ is. Men overtuigt zich er gemakkelijk van dat D niet identiek nul is. De gevonden uitdrukking D wordt de discriminant van f genoemd.

Opg. 3. De discriminant van f is op te vatten als resultante van

$$f_1 = f' \quad \text{en} \quad f_2 = nf - xf'.$$

Opg. 4. Schrijft men $f(x) = f(x, 1)$, waarbij

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

dan is de in opgave 3 gevonden vorm f_2 gelijk aan

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

waarin $y=1$ gesteld is. (Dit is een bijzonder geval van de stelling van Euler, die zegt dat een homogene vorm f van de graad n in de variabelen $x, y, z, \dots$ voldoet aan

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + \dots = nf)$$

Opg. 5. Bepaal de discriminant van elk der vergelijkingen

$$x^2 + px + q = 0; \quad x^3 + px + q = 0; \quad x^4 + px + q = 0$$

Opg. 6. Bepaal de discriminant van de vergelijking

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

Men kan ook op geheel andere wijze komen tot de uitdrukking D. Beschouw daartoe de uitdrukking

$$V = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_{n-1} - x_n),$$

bestaande uit $\frac{n(n-1)}{2}$ factoren. Het is duidelijk dat V nul wordt

zodra twee der nulpunten van $f(x)$ gelijk zijn. V is echter geen symmetrische vorm in de grootheden $x_1, \dots, x_n$ want verwisseling van twee dezer grootheden doet V in zijn tegengestelde overgaan. (Een zodanige vorm noemt men alternerend). Juist dit resultaat leert ons welke functie der nulpuntverschillen we moeten nemen om wel een symmetrische uitdrukking in de wortels te krijgen. We beschouwen nl. de functie

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

waarin naast bv. de factor $x_1 - x_2$ ook de factor $x_2 - x_1$ optreedt.

Deze functie, die juist gelijk is aan $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V^2$, wordt slechts nul als twee der nulpunten van $f(x)$ samenvallen en deze functie is symmetrisch in die nulpunten, dus geheel en rationaal uit te drukken in

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}.$$

Daar V^2 in elk der nulpunten van de graad $2n-2$ is, is $a_0^{2n-2} V^2$ een gehele rationale functie van $a_1, a_2, \dots, a_n$, die dan en slechts dan nul wordt, als twee der nulpunten van $f(x)$ samenvallen. De bovengevonden uitdrukking D wordt nul als twee der nulpunten samenvallen en is dus deelbaar door $a_0^{2n-2} V^2$. Aangezien echter D van het gewicht $n(n-1)$ is in de grootheden $a_0, a_1, \dots, a_n$ en $a_0^{2n-2} V^2$ als symmetrische functie van de graad $n(n-1)$ eveneens dit gewicht bezit moet het quotient een gewicht nul bezitten, zodat dit quotient afgezien van getallen factoren van de gedaante a_0^p is. Daar D van de graad $2n-2$ is in de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n$ en V^2 van de graad $2n-2$ in x_1 , dus $a_0^{2n-2} V^2$ van de graad $2n-2$ in de grootheden $a_0, a_1, \dots, a_n$ is, moet $p = 0$ zijn zodat $a_0^{2n-2} V^2$ en D afgezien van getallen factoren overeenstemmen. Zo heeft men bij de vierkantsvergelijking $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} = -a_1^2 + 4a_0a_2$$

$$a_0^2 V^2 = a_0^2 (x_1 - x_2)^2 = a_0^2 ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

Opg. 7. Bij de cubische vergelijking $x^3 + px + q = 0$ drukke men de symmetrische uitdrukking

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

uit in de coëfficiënten p en q , gebruik makende van de relatie

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$